C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 817-822, 1998
Analyse fonctionnelle/*Functional Analysis*

L'espace de Banach c_0 est déterminé par sa métrique

Gilles GODEFROY [a], Nigel J. KALTON [b], Gilles LANCIEN [c]

[a] Équipe d'analyse, Université Paris VI, boîte 186, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France
Courriel : gig@ccr.jussieu.fr

[b] Departement of Mathematics, University of Missouri, Columbia, MO 65211, USA
Courriel : nigel@math.missouri.edu

[c] Équipe de mathématiques, UMR 6623, Université de Franche-Comté, 25030 Besançon cedex, France
Courriel : glancien@math.univ-fcomte.fr

(Reçu le 9 septembre 1998, accepté le 5 octobre 1998)

Résumé. Dans cette Note nous montrons qu'un espace de Banach Lipschitz-isomorphe à un sous-espace de c_0 est linéairement isomorphe à un sous-espace de c_0 et nous en déduisons qu'un espace Lipschitz-isomorphe à c_0 est linéairement isomorphe à c_0. Ensuite, nous prouvons qu'un espace uniformément homéomorphe à un sous-espace de c_0 a un indice de Szlenk sommable. Finalement, nous examinons dans quelle mesure ces résultats peuvent s'étendre au cas non séparable. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

The Banach space c_0 is determined by its metric

Abstract. *In this Note we show that a Banach space which is Lipschitz-isomorphic to a subspace of c_0 is linearly isomorphic to a subspace of c_0. We deduce that a space which is Lipschitz-isomorphic to c_0 is in fact linearly isomorphic to c_0. We also prove that a space which is uniformly homeomorphic to a subspace of c_0 has a summable Szlenk index. Finally, we investigate the extension of these results to the non-separable case.*
© Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

We begin this Note by giving a characterization, in terms of renormings, of the Banach spaces linearly isomorphic to a subspace of c_0. First, we need the following definition.

DEFINITION 1. – Let X be a separable Banach space. The norm of X is said to be *Lipschitz-UKK** if there exists $c > 0$ such that its dual norm satisfies the following property: for any x^* in X^* and any weak* null sequence $(x_n^*)_{n\geq 1}$ in X^* ($x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$),

$$\limsup \|x^* + x_n^*\| \geq \|x^*\| + c \limsup \|x_n^*\|.$$

Note présentée par Gilles PISIER.

If the above property is satisfied with the optimal value $c = 1$, we say that the norm of X is *metric-UKK**.

By adapting a construction due to N. Kalton and D. Werner [7], we obtain:

THEOREM 2. – *A separable Banach space is linearly isomorphic to a subspace of c_0 if and only if it admits an equivalent Lipschitz-UKK* norm.*

The next statement is a slight modification of Gorelik's principle as it is presented in [5].

PROPOSITION 3 (Gorelik's principle). – *Let X and Y be two Banach spaces and U be a homeomorphism from X onto Y with uniformly continuous inverse. Let b and d be two positive constants and let X_0 be a subspace of finite codimension of X. If $d > \omega(U^{-1}, b)$, then there exists a compact subset K of Y such that $b\,\mathrm{B}_Y \subset K + U(2d\,\mathrm{B}_{X_0})$, where $\omega(U^{-1}, t) = \sup\{\|U^{-1}y_1 - U^{-1}y_2\|,\ \|y_1 - y_2\| \le t\}$ is the modulus of uniform continuity of U^{-1} and B_X denotes the open unit ball of the Banach space X.*

Remark 1. – If U is a linear isomorphism from a Banach space X onto a Banach space Y, then it is easy to see that whenever X_0 is a finite-codimensional subspace of X, any normalized weak* null sequence (y_k^*) in Y^* is eventually normed, by $U(\lambda \mathrm{B}_{X_0})$, where λ does not depend on X_0. It follows from Gorelik's principle that this remains true if U is a homeomorphism with uniformly continuous inverse.

We can now state one of our main results:

THEOREM 4. – *Let X be a Banach space which is Lipschitz isomorphic to a subspace E of c_0. Then X is linearly isomorphic to a subspace of c_0.*

When E is c_0, we deduce a more precise result:

THEOREM 5. – *If a Banach space is Lipschitz-isomorphic to c_0, then it is linearly isomorphic to c_0.*

Before giving the next two statements, we need to recall a derivation that was first used by W. Szlenk [13]. So let X be a Banach space and A be a subset of X. For $\varepsilon > 0$, we define:

$$A'_\varepsilon = \left\{x^* \in A \mid \exists\, (x_n^*)_{n\ge 1} \subset A,\ x_n^* \xrightarrow{w^*} x^* \text{ and } \forall n \ge 1,\ \|x_n^* - x^*\| \ge \varepsilon\right\}.$$

Then, by induction: for $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$, $A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = (A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}})'_{\varepsilon_n}$ and for $\varepsilon > 0$ and $n \in \mathbb{N}$, $A_\varepsilon^{n+1} = (A_\varepsilon^n)'_\varepsilon$.

We say that X has a *summable Szlenk index* (this notion was introduced in [8]) if there exists $K > 0$ so that, for all $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ verifying $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i > K$, we have $(\mathrm{B}_{X^*})_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \emptyset$.

We say that X has a *finite Szlenk index* if for any $\varepsilon > 0$, there exists n in $\mathbb{N}$ such that $(\mathrm{B}_{X^*})_\varepsilon^n = \emptyset$.

THEOREM 6. – *A Banach space which is uniformly homeomorphic to a subspace of c_0 admits a summable Szlenk index.*

Keeping in mind Theorem 2, the link between the summability of the Szlenk index and the subspaces of c_0 is explained by our next result.

THEOREM 7. – *Let X be a Banach space. If X has summable Szlenk index, then there is a constant $c > 0$ so that, whenever $f : [0,1] \to [0,1]$ is an increasing function such that $f(\varepsilon) \le \varepsilon$ for $0 \le \varepsilon \le 1$ and $\lim_{\varepsilon\to 0}(f(\varepsilon)/\varepsilon) = 0$, then there is a 2-renorming of X so that*

$$\liminf \|x^* + x_n^*\| \ge 1 + cf(\varepsilon),$$

for all x^* and (x_n^*) in X^* such that $\|x^*\| = 1$, $\|x_n^*\| \ge \varepsilon$ and $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$.

Remark 2. – We also obtain that the condition "having a finite Szlenk index" is stable under uniform homeomorphisms (even in the non separable case). However, it follows from a counterexample due to M. Ribe [12] that it is not the case for the condition "having a separable dual", which could be equivalently described as "being separable and with a countable Szlenk index".

Theorem 2 shows in particular that a separable Banach space has an equivalent Lipschitz-UKK* norm if and only if it has an equivalent metric-UKK* norm. Our last two statements show that this equivalence does not extend to the non separable case.

THEOREM 8. – *Let K be a compact space. The following assertions are equivalent:*

(i) *The Cantor derived set of order ω_0 of K is empty.*

(ii) *$C(K)$ is Lipschitz isomorphic to $c_0(\Gamma)$, where Γ is the density character of $C(K)$.*

(iii) *$C(K)$ admits an equivalent Lipschitz-UKK* norm.*

THEOREM 9. – *Let K be a compact space. The following assertions are equivalent:*

(i) *K is an Eberlein compact and its Cantor derived set of order ω_0 is empty.*

(ii) *$C(K)$ is linearly isomorphic to $c_0(\Gamma)$, where Γ is the density character of $C(K)$.*

(iii) *$C(K)$ admits an equivalent metric-UKK* norm.*

Notice that there exists a non-Eberlein compact set whose third derived set is empty (*see* [1], Chap. VI.8).

1. Espaces de Banach uniformément homéomorphes à un sous-espace de c_0

Nous débutons cette Note en donnant une caractérisation en termes de renormage des espaces de Banach linéairement isomorphes à un sous-espace de c_0. Pour cela nous introduisons la définition suivante :

DÉFINITION 1.1. – Soit X un espace de Banach séparable. On dit que la norme de X est *Lipschitz-UKK** s'il existe $c > 0$ tel que sa norme duale satisfait la propriété suivante : pour tout x^* de X^* et toute suite $(x_n^*)_{n\geq 1}$ dans X^* préfaiblement convergente vers 0 ($x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$),

$$\limsup \|x^* + x_n^*\| \geq \|x^*\| + c \limsup \|x_n^*\|.$$

Si la propriété ci-dessus est vérifiée pour la valeur optimale $c = 1$, on dira que la norme de X est *métrique-UKK**.

Nous obtenons alors le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2. – *Un espace de Banach séparable est linéairement isomorphe à un sous-espace de c_0 si et seulement si il admet une norme équivalente Lipschitz-UKK*.*

La démonstration de ce théorème consiste en fait à reprendre une construction due à N. Kalton et D. Werner [7] qui montrent, entre autres, qu'un espace qui admet une norme équivalente métrique-UKK* se plonge de façon presque isométrique dans c_0.

Soit V une application uniformément continue d'un espace de Banach Y dans un espace de Banach X. On notera $\omega(V, t) = \sup\{\|Vy_1 - Vy_2\|, \|y_1 - y_2\| \leq t\}$ le module de continuité uniforme de V. Par ailleurs, B_X désignera la boule unité ouverte de l'espace de Banach X.

Le principe de Gorelik s'est récemment imposé comme un outil essentiel pour aborder les questions sur les homéomorphismes uniformes entre espaces de Banach. Nous donnons ici une formulation différente de celle qui est présentée dans [5].

PROPOSITION 1.3 (principe de Gorelik). – *Soient X et Y deux espaces de Banach et U un homéomorphisme de X sur Y d'inverse uniformément continu. Soient b et d deux constantes strictement* *positives et soit X_0 un sous-espace de codimension finie de X. Si $d > \omega(U^{-1}, b)$, alors il existe un compact K de Y tel que $b\mathrm{B}_Y \subset K + U(2d\mathrm{B}_{X_0})$.*

Nous rappelons tout d'abord un lemme fondamental dû à Gorelik [3] et qu'on peut aussi trouver dans [5].

LEMME 1.4. – *Pour tous $\varepsilon > 0$ et $d > 0$, il existe un sous-ensemble compact A de $d\mathrm{B}_X$ tel que si Φ est une application continue de A dans X vérifiant $\|\Phi(a) - a\| < (1-\varepsilon)d$ pour tout a dans A, alors $\Phi(A) \cap X_0 \neq \emptyset$.*

Démonstration de la proposition 3. – $\varepsilon > 0$ tel que $d(1-\varepsilon) > \omega(U^{-1}, b)$. On pose $K = -U(A)$, où A est le compact donné par le lemme 1.4. Considérons y dans $b\mathrm{B}_Y$ et l'application Φ de A dans X définie par $\Phi(a) = U^{-1}(y + Ua)$. On a bien que pour tout a dans A, $\|\Phi(a) - a\| < (1-\varepsilon)d$. Il s'ensuit alors du lemme 1.4 qu'il existe $a \in A$ tel que $U^{-1}(y + Ua) \in 2d\mathrm{B}_{X_0}$, ce qui conclut la démonstration. □

Nous pouvons maintenant énoncer un des principaux résultats de cette Note :

THÉORÈME 1.5. – *Soit X un espace de Banach Lipschitz-isomorphe à un sous-espace E de c_0. Alors X est linéairement isomorphe à un sous-espace de c_0.*

Démonstration. – D'après le théorème 1.2, il suffit de construire une norme équivalente Lipschitz-UKK* sur X. Soit donc U un isomorphisme lipschitzien de E sur X. Pour $x^* \in X^*$, on pose :

$$|||x^*||| = \sup\left\{\frac{|x^*(Ue - Ue')|}{\|e - e'\|} \,;\, (e, e') \in E \times E,\ e \neq e'\right\}.$$

Comme U et U^{-1} sont lipschitziennes, $|||\ |||$ est une norme équivalente sur X^*. Elle est clairement préfaiblement semi-continue inférieurement ; il s'agit donc de la norme duale d'une norme équivalente sur X que nous noterons également $|||\ |||$.

Considérons $x^* \in X^*$ et $(x_k^*)_{k\geq 1} \subset X^*$ tels que $x_k^* \xrightarrow{w^*} 0$ et $\|x_k^*\| \geq \varepsilon > 0$, $\forall k \geq 1$. Fixons $\delta > 0$, puis e et e' dans E tels que $\dfrac{x^*(Ue - Ue')}{\|e - e'\|} > (1-\delta)|||x^*|||$. Quitte à modifier U à l'aide de translations, on peut supposer que $e = -e'$ et $Ue = -Ue'$. Comme E est un sous-espace de c_0, il possède un sous-espace de codimension finie E_0 tel que

$$\forall f \in \|e\|\mathrm{B}_{E_0}, \quad \|e + f\| \vee \|e - f\| \leq (1+\delta)\|e\|. \tag{1}$$

Notons alors C la constante de Lipschitz de U^{-1}. D'après la proposition 1.3, pour tout $b < \dfrac{\|e\|}{2C}$, il existe un compact K de X tel que $b\mathrm{B}_X \subset K + U(\|e\|\mathrm{B}_{E_0})$. Comme (x_k^*) converge uniformément vers 0 sur tout compact de X, on peut construire une suite $(f_k)_{k\geq 1}$ dans $\|e\|\mathrm{B}_{E_0}$ telle que :

$$\liminf\ x_k^*(-Uf_k) \geq \frac{\varepsilon\|e\|}{2C}.$$

On déduit de (1) que $x^*(Uf_k + Ue) \leq (1+\delta)\|e\|\,|||x^*|||$ et donc que $x^*(Uf_k) \leq 2\delta\|e\|\,|||x^*|||$. Comme par ailleurs $x_k^* \xrightarrow{w^*} 0$, on obtient que :

$$\liminf\ (x^* + x_k^*)(Ue - Uf_k) \geq (1 - 3\delta)\|e\|\,|||x^*||| + \frac{\varepsilon\|e\|}{2C}.$$

Puisque δ est arbitraire, en se reportant à la définition de $|||\ |||$ et en utilisant (1), on voit que $\liminf |||x^* + x_k^*||| \geq |||x^*||| + \dfrac{\varepsilon}{2C}$, ce qui prouve que $|||\ |||$ est Lipschitz-UKK*. □

Dans le cas où $E = c_0$, nous pouvons en déduire un énoncé plus précis :

THÉORÈME 1.6. – *Si un espace de Banach X est Lipschitz-isomorphe à c_0, alors il est linéairement isomorphe à c_0.*

Démonstration. – Le théorème précédent assure que X est linéairement isomorphe à un sous-espace de c_0. Par ailleurs, il est connu qu'un espace uniformément homéomorphe à c_0 est $\mathcal{L}^\infty$ ([4] et [11]) et qu'un sous-espace $\mathcal{L}^\infty$ de c_0 est isomorphe à c_0 [6]. □

Avant d'énoncer, sans fournir de preuve, les derniers résultats de cette section, nous devons rappeler la définition d'une dérivation dont l'utilisation a été initiée par W. Szlenk [13]. Soient donc X un espace de Banach et A un sous-ensemble de X. Pour $\varepsilon > 0$ on définit :

$$A'_\varepsilon = \{x^* \in A \mid \exists\,(x_n^*)_{n\geq 1} \subset A,\ x_n^* \xrightarrow{w^*} x^* \text{ et } \forall n \geq 1,\ \|x_n^* - x^*\| \geq \varepsilon\}.$$

Puis, par récurrence : pour $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$, $A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = (A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-1}})'_{\varepsilon_n}$ et pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $A_\varepsilon^{n+1} = (A_\varepsilon^n)'_\varepsilon$.

On dit que X admet un *indice de Szlenk sommable* (notion introduite dans [8]) si il existe $K > 0$ tel que pour tous $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ vérifiant $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i > K$, on a $(\mathrm{B}_{X^*})_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \emptyset$.

On dit que X admet un *indice de Szlenk fini* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $(\mathrm{B}_{X^*})_\varepsilon^n = \emptyset$.

THÉORÈME 1.7. – *Si X est un espace de Banach uniformément homéomorphe à un sous-espace de c_0, alors X possède un indice de Szlenk sommable.*

Remarques 1.1. – Il s'ensuit en particulier que X^* est séparable. Si X est uniformément homéomorphe à c_0, on a donc que X est $\mathcal{L}^\infty$ à dual séparable ; on sait alors que X^* est isomorphe à ℓ_1 (*voir* [10]).

Il est important de souligner qu'il est prouvé dans [8] que l'espace de Tsirelson, qui n'est isomorphe à aucun sous-espace de c_0, possède un indice de Szlenk sommable. Cependant, en comparant le théorème suivant avec le théorème 1.2, on comprend mieux le lien qui existe entre la sommabilité de l'indice de Szlenk et les sous-espaces de c_0.

THÉORÈME 1.8. – *Soit X un espace de Banach. Si X admet un indice de Szlenk sommable, alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute application croissante $f : [0,1] \to [0,1]$ vérifiant $f(\varepsilon) \leq \varepsilon$ pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$ et $\lim_{\varepsilon\to 0}(f(\varepsilon)/\varepsilon) = 0$, il existe une norme 2-équivalente à la norme originale de X telle que :*

$$\liminf \|x^* + x_n^*\| \geq 1 + c\,f(\varepsilon),$$

pour tous x^* et $(x_n^*)_{n\geq 1}$ dans X^* tels que $\|x^*\| = 1$, $\|x_n^*\| \geq \varepsilon$ et $x_n^* \xrightarrow{w^*} 0$.

Remarque 1.2. – Nous obtenons aussi le résultat suivant : le fait d'avoir un indice de Szlenk fini, même dans le cas non séparable, est une propriété stable par homéomorphisme uniforme. On sait cependant, grâce à un contre-exemple construit par M. Ribe [12], que le fait d'avoir un dual séparable (c'est-à-dire être un espace de Banach séparable avec un indice de Szlenk dénombrable) n'est pas une propriété stable par homéomorphisme uniforme.

2. Le cas non séparable

Le théorème 1.2 montre en particulier qu'un espace de Banach séparable a une norme équivalente Lipschitz-UKK* si et seulement si il a une norme équivalente métrique-UKK*. Cette équivalence ne s'étend pas au cas non séparable, comme le montrent les deux énoncés de cette section.

Désignons auparavant par ω_0 le premier ordinal infini.

THÉORÈME 2.1. – *Soit K un espace compact. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le dérivé de Cantor d'ordre ω_0 de K est vide.*

(ii) *$C(K)$ est Lipschitz isomorphe à $c_0(\Gamma)$, où Γ est le caractère de densité de $C(K)$.*

(iii) *$C(K)$ admet une norme équivalente Lipschitz-UKK*.*

L'équivalence entre (i) et (ii) figure dans [5], Theorem 6.3, alors que l'équivalence entre (i) et (iii) se déduit aisément de la démonstration de [9], Theorem 3.8.

THÉORÈME 2.2. – *Soit K un espace compact. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *K est un compact d'Eberlein et son dérivé de Cantor d'ordre ω_0 est vide.*

(ii) *$C(K)$ est linéairement isomorphe à $c_0(\Gamma)$, où Γ est le caractère de densité de $C(K)$.*

(iii) *$C(K)$ admet une norme équivalente métrique-UKK*.*

La preuve de ce théorème utilise en particulier l'existence d'une PRI contractante sur tout espace M-idéal de son bidual (*voir* [2]).

Remarques 2.1. – Nous renvoyons le lecteur à [1] pour les définitions d'une PRI et d'un compact d'Eberlein, mais soulignons qu'il existe des compacts non Eberlein dont le dérivé d'ordre 3 est vide (*voir* [1], Chap. VI.8), ce qui fournit des couples d'espaces Lipschitz isomorphes mais non linéairement isomorphes.

Références bibliographiques

[1] Deville R., Godefroy G., Zizler V., Smoothness and renormings in Banach spaces, Longman Scientific and Technical, 1992.

[2] Fabian M., Godefroy G., The dual of every Asplund space admits a projectional resolution of the identity, Studia Math. 91 (1988) 141–151.

[3] Gorelik E., The uniform nonequivalence of L_p and ℓ_p, Israel J. Math. 87 (1994) 1–8.

[4] Heinrich S., Mankiewicz P., Applications of ultrapowers to the uniform and Lipschitz classification of Banach spaces, Studia Math. 73 (1982) 225–251.

[5] Johnson W.B., Lindenstrauss J., Schechtman G., Banach spaces determined by their uniform structures, Geom. Funct. Anal. 3 (1996) 430–470.

[6] Johnson W.B., Zippin M., On subspaces of quotients of $(\sum G_n)_{\ell_p}$ and $(\sum G_n)_{c_0}$, Israel J. Math. 13 (1972) 311–316.

[7] Kalton N.J., Werner D., Property (M), M-ideals and almost isometric structure of Banach spaces, J. Reine Angew. Math. 461 (1995) 137–178.

[8] Knaust H., Odell E., Schlumprecht T., On asymptotic structure, the Szlenk index and UKK properties in Banach spaces, preprint.

[9] Lancien G., On uniformly convex and uniformly Kadec–Klee renormings, Serdica Math. J. 21 (1995) 1–18.

[10] Lewis D.R., Stegall C., Banach spaces whose duals are isomorphic to $\ell_1(\Gamma)$, J. Funct. Anal. 12 (1973) 177–187.

[11] Lindenstrauss J., On nonlinear projections in Banach spaces, Michigan J. Math. 11 (1964) 268–287.

[12] Ribe M., Existence of separable uniformly homeomorphic non-isomorphic Banach spaces, Israel J. Math. 48 (1984) 139–147.

[13] Szlenk W., The non-existence of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces, Studia Math. 30 (1968) 53–61.