

# LES PLANTES FONT-ELLES DES MATHÉMATIQUES ?

Des tournesols à Fibonacci

Anne-Marie Aebischer - Françoise de Labachelerie

IREM DE FRANCHE-COMTÉ



LES PLANTES FONT-ELLES DES MATHÉMATIQUES ?

Anne-Marie Aebischer - Françoise de Labachelerie

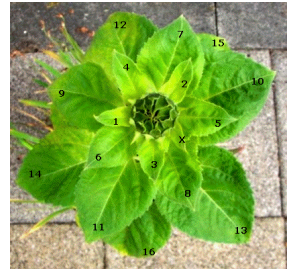
IREM DE FRANCHE-COMTÉ













$$\dots, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

A diagram below the sequence shows a horizontal line under the number 21. From the right end of this line, a vertical line goes down, then a horizontal line goes right, and finally a vertical line goes up with an arrowhead pointing to the number 55. A plus sign (+) is placed in the center of the bottom horizontal line, indicating that 21 + 34 = 55.





$$\dots, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

A diagram below the sequence shows a horizontal line under the number 21, with a vertical line extending down from its right end, a horizontal line extending to the right from that vertical line, and a vertical line extending up from that horizontal line ending in an upward-pointing arrow. A plus sign (+) is placed in the center of the bottom horizontal line, indicating that 55 is the sum of 21 and 34.



FIBONACCI (Léonard de Pise)  
1180 - 1240

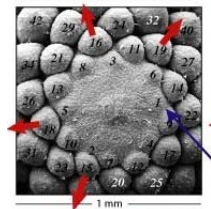
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$



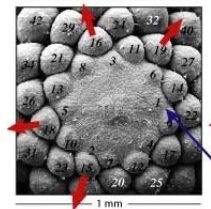
- POURQUOI DES SPIRALES APPARAISSENT-ELLES LORS DE LA CROISSANCE DES PLANTES ?
- POURQUOI LE NOMBRE DE SPIRALES EST-IL UN ÉLÉMENT DE LA SUITE DE FIBONACCI ?



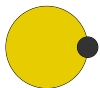




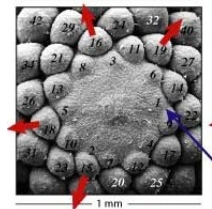
- Les primordia naissent au bord de l'apex, à intervalles de temps réguliers.



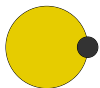
## Étape 1



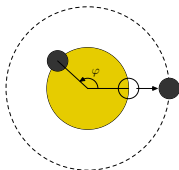
- ❁ Les primordia naissent au bord de l'apex, à intervalles de temps réguliers.
- ❁ Ils se déplacent ensuite radialement.
- ❁ L'angle entre deux primordia successifs est constant, appelé « **angle de divergence** ».



Étape 1



Étape 2

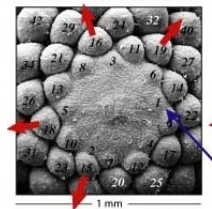


LES PLANTES FONT-ELLES DES MATHÉMATIQUES ?

Anne-Marie Aebischer - Françoise de Labachellerie

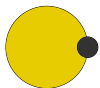
IREM DE FRANCHE-COMTÉ

- Les primordia naissent au bord de l'apex, à intervalles de temps réguliers.
- Ils se déplacent ensuite radialement.
- L'angle entre deux primordia successifs est constant, appelé « **angle de divergence** ».

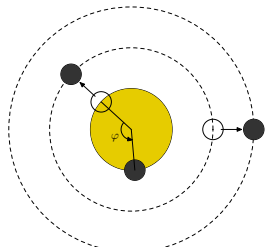
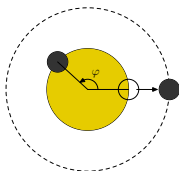


Étape 3

Étape 1



Étape 2



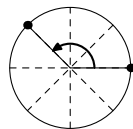


LES PLANTES FONT-ELLES DES MATHÉMATIQUES ?  
Anne-Marie Aebischer - Françoise de Labacherie  
IREM DE FRANCHE-COMTÉ



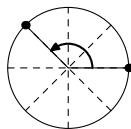


$$\text{angle} = \frac{3}{8} \text{ de tour}$$





$$\text{angle} = \frac{3}{8} \text{ de tour}$$



$$\text{angle de divergence} = 135^\circ$$



135°



8 demi-droites

$$\frac{135}{360} = \frac{3}{8}$$

136°



8 spirales

$$\frac{136}{360} \approx \frac{3}{8}$$





135°



8 demi-droites

$$\frac{135}{360} = \frac{3}{8}$$

136°

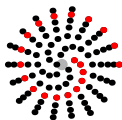


8 spirales

$$\frac{136}{360} \approx \frac{3}{8}$$

18 demi-droites

140°



135°



8 demi-droites

$$\frac{135}{360} = \frac{3}{8}$$

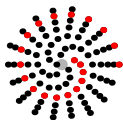
136°



8 spirales

$$\frac{136}{360} \approx \frac{3}{8}$$

140°



18 demi-droites

$$\frac{140}{360} = \frac{7}{18}$$

5 spirales



135°



8 demi-droites

$$\frac{135}{360} = \frac{3}{8}$$

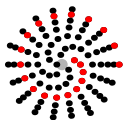
136°



8 spirales

$$\frac{136}{360} \approx \frac{3}{8}$$

140°



18 demi-droites

$$\frac{140}{360} = \frac{7}{18}$$

5 spirales

$$\frac{140}{360} \approx \frac{5}{12}$$



- POURQUOI DES SPIRALES APPARAISSENT-ELLES LORS DE LA CROISSANCE DES PLANTES ?

*C'est l'indice qu'il y a une fraction « simple » proche de l'angle de divergence.*

- POURQUOI LE NOMBRE DE SPIRALES EST-IL UN ÉLÉMENT DE LA SUITE DE FIBONACCI ?
  - COMMENT TROUVER LES FRACTIONS « SIMPLES » PROCHES D'UN NOMBRE DONNÉ ?



Fractions « simples » proches de :  $\frac{140}{360} = \frac{7}{18}$

$\frac{7}{18}$   
A  
x

---



Fractions « simples » proches de :  $\frac{140}{360} = \frac{7}{18}$

A  $\frac{7}{18}$

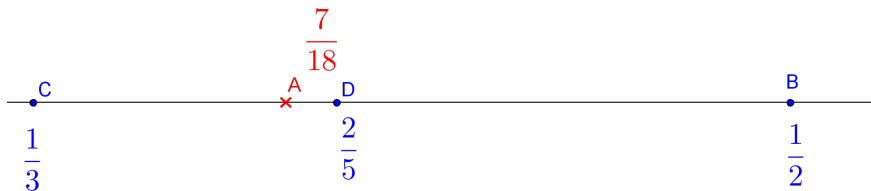
B  $\frac{1}{2}$



Fractions « simples » proches de :  $\frac{140}{360} = \frac{7}{18}$

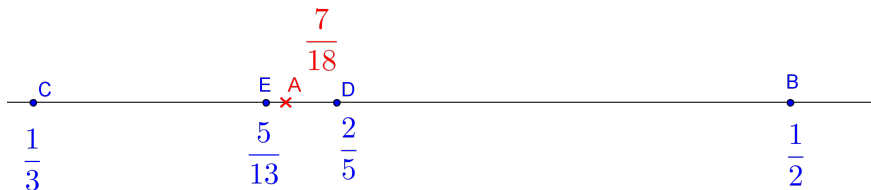


Fractions « simples » proches de :  $\frac{140}{360} = \frac{7}{18}$





Fractions « simples » proches de :  $\frac{140}{360} = \frac{7}{18}$



$$\frac{140}{360} = \frac{1}{\frac{360}{140}} =$$



$$\frac{140}{360} = \frac{1}{\frac{360}{140}} = \frac{1}{2 + \frac{80}{140}} = \frac{1}{2 + \frac{140}{80}} =$$



$$\frac{140}{360} = \frac{1}{\frac{360}{140}} = \frac{1}{2 + \frac{80}{140}} = \frac{1}{2 + \frac{140}{80}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{60}{80}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{80}{60}}}} =$$



$$\frac{140}{360} = \frac{1}{\frac{360}{140}} = \frac{1}{2 + \frac{80}{140}} = \frac{1}{2 + \frac{140}{80}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{60}{80}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{80}{60}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{20}{60}}}}$$



$$\frac{140}{360} = \frac{1}{\frac{360}{140}} = \frac{1}{2 + \frac{80}{140}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{140}{80}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{60}{80}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{80}{60}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{20}{60}}}}$$

$$\frac{140}{360} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$



$$\frac{140}{360} = \frac{7}{18} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$

$$\frac{7}{18} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} \approx \frac{1}{2}$$



$$\frac{140}{360} = \frac{7}{18} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$

$$\frac{7}{18} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} \approx \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{18} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} \approx \frac{1}{3}$$



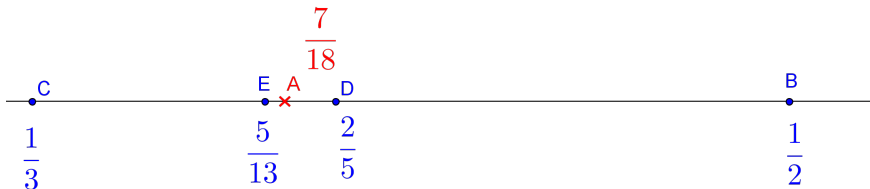


$$\frac{140}{360} = \frac{7}{18} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$

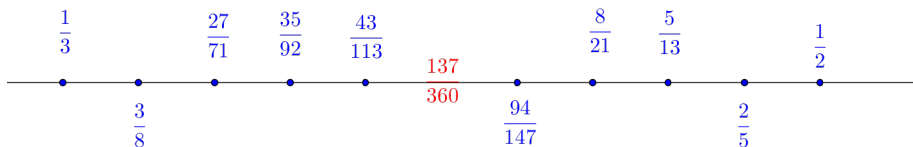
$$\frac{7}{18} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} \approx \frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{18} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} \approx \frac{1}{3}$$

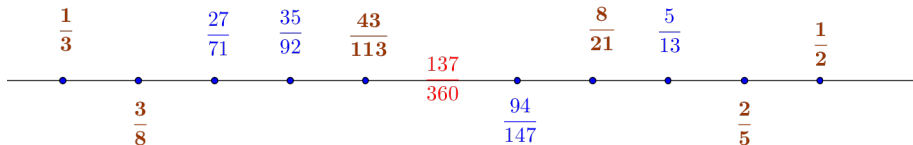
$$\frac{7}{18} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} \approx \frac{2}{5}$$

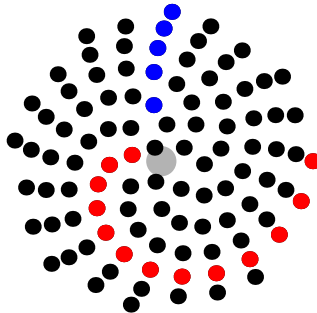


Fractions proches de  $\frac{137}{360}$



Fractions proches de  $\frac{137}{360}$





$137^\circ$



## HOFMEISTER, 1868



WILHELM HOFMEISTER

Fig. 1. Portrait of Wilhelm Hofmeister (left) and his spiral sunflower (right) published in 'Die Natur' edited by Gadow, 1868.

**Les primordia naissent de façon à optimiser l'occupation de l'espace.**



LES PLANTES FONT-ELLES DES MATHÉMATIQUES ?

Anne-Marie Aebischer - Françoise de Labachellerie

IREM DE FRANCHE-COMTÉ



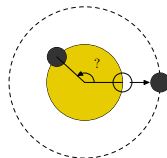
## HOFMEISTER, 1868



WILHELM HOFMEISTER  
Fig. 1. Pattern of Wilhelm Hofmeister that optimizes angular distribution. (The Photo credit to Google, 1988)

**Les primordia naissent de façon à optimiser l'occupation de l'espace.**

- QUEL EST L'ANGLE DE DIVERGENCE LORS DE LA CROISSANCE DES PLANTES ?
  - COMMENT CHOISIR L'ANGLE DE DIVERGENCE POUR OCCUPER AU MAXIMUM L'ESPACE ?

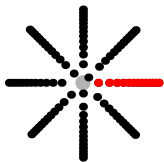


LES PLANTES FONT-ELLES DES MATHÉMATIQUES ?

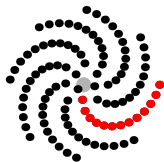
Anne-Marie Aebischer - Françoise de Labachellerie

IREM DE FRANCHE-COMTÉ

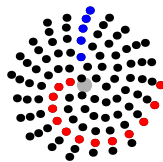




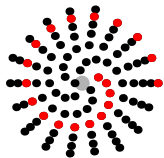
$135^\circ$



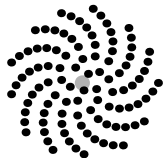
$136^\circ$



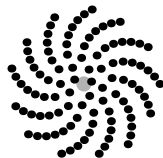
$137^\circ$



$140^\circ$

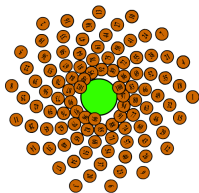


$139^\circ$

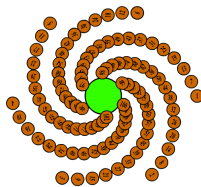


$138^\circ$

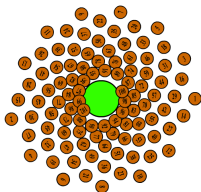




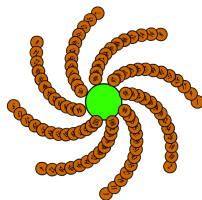
$\sqrt{7}$  tours



$\sqrt{10}$  tours



$\sqrt{13}$  tours



$\sqrt{17}$  tours





$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}$$

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}$$

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}$$

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{1}{8 + \frac{1}{8 + \frac{1}{8 + \frac{1}{8 + \frac{1}{8 + \dots}}}}}$$



$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}$$

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}$$

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}$$

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{1}{8 + \frac{1}{8 + \frac{1}{8 + \frac{1}{8 + \frac{1}{8 + \dots}}}}}$$



$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$



$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$



$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$\varphi = \frac{1}{1 + \varphi}$$



$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$\varphi = \frac{1}{1 + \varphi}$$

$$\varphi + \varphi^2 = 1$$



$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

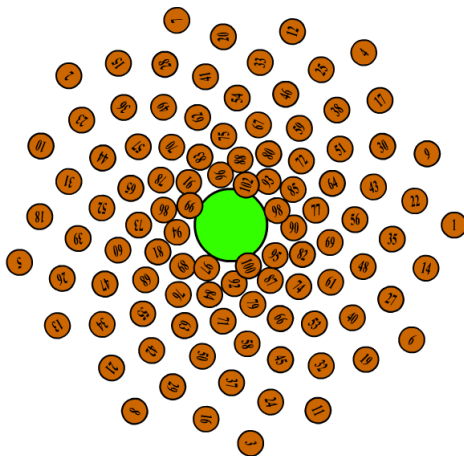
$$\varphi = \frac{1}{1 + \varphi}$$

$$\varphi + \varphi^2 = 1$$

$$\varphi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618$$



$$\text{angle} = \varphi \times \text{ang}360 \approx 222.492\ 236^\circ$$



LES PLANTES FONT-ELLES DES MATHÉMATIQUES ?

Anne-Marie Aebischer - Françoise de Labachellerie

IREM DE FRANCHE-COMTÉ

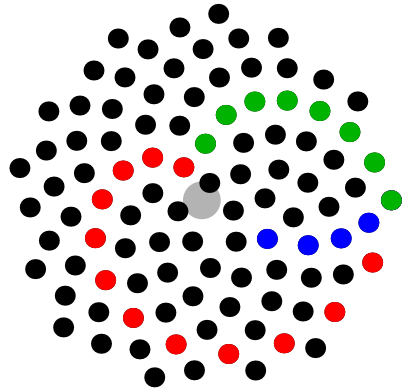




## RÉALITÉ



## SIMULATION



- POURQUOI DES SPIRALES APPARAISSENT-ELLES LORS DE LA CROISSANCE DES PLANTES ?

*C'est l'indice qu'il y a une fraction « simple » proche de l'angle de divergence.*

- POURQUOI LE NOMBRE DE SPIRALES EST-IL UN ÉLÉMENT DE LA SUITE DE FIBONACCI ?

- COMMENT CHOISIR L'ANGLE DE DIVERGENCE POUR OCCUPER AU MAXIMUM L'ESPACE ?

*C'est l'angle d'or, égal à  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \times 360^\circ \approx 222.5^\circ$*



$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$$R_1 = \frac{1}{1 + 1}$$



$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$$R_1 = \frac{1}{1 + 1}$$

$$R_1 = \frac{1}{2}$$

$$R_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}} =$$



$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$$R_1 = \frac{1}{1+1}$$

$$R_1 = \frac{1}{2}$$

$$R_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2+1}{2}} = \frac{2}{2+1}$$

$$R_2 = \frac{2}{3}$$

$$R_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}} =$$



$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$$R_1 = \frac{1}{1+1}$$

$$R_1 = \frac{1}{2}$$

$$R_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2+1}{2}} = \frac{2}{2+1}$$

$$R_2 = \frac{2}{3}$$

$$R_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3+2}{3}} = \frac{3}{3+2}$$

$$R_3 = \frac{3}{5}$$



- POURQUOI DES SPIRALES APPARAISSENT-ELLES LORS DE LA CROISSANCE DES PLANTES ?

*C'est l'indice qu'il y a une fraction « simple » proche de l'angle de divergence.*

- POURQUOI LE NOMBRE DE SPIRALES EST-IL UN ÉLÉMENT DE LA SUITE DE FIBONACCI ?

*Parce que la suite de Fibonacci se retrouve dans les fractions approchant l'angle d'or.*

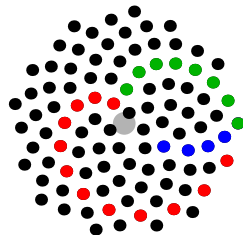
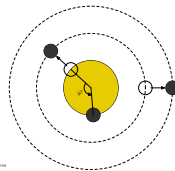
- COMMENT CHOISIR L'ANGLE DE DIVERGENCE POUR OCCUPER AU MAXIMUM L'ESPACE ?

*C'est l'angle d'or, égal à  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \times 360^\circ \approx 222.5^\circ$*





WILHELM BRAGG (1876-1962)  
Fig. 1. Orbits of Wilson Bragg and his electrons (adapted to the Planck Model, 1984)





## PHYLLOTAXIE ET MATHÉMATIQUES

- ❁ Accromath, volume 3-2, Spirales végétales, de Christaine Rousseau.  
Revue québécoise disponible en ligne : <http://accromath.uqam.ca/>
- ❁ TPE avec simulateur de tournesols.  
<http://tpe.tournesol.free.fr/tournesol.htm>
- ❁ La Recherche, janvier 1993, La physique des spirales végétales, de Stéphane Douady et Yves Couder.
- ❁ Site d'un Collège, dans le Massachusetts (des articles récents de recherche, et de magnifiques photos du jardin botanique) <http://www.math.smith.edu/phyлло/>
- ❁ IREM de FRANCHE-COMTÉ <http://www-irem.univ-fcomte.fr>

