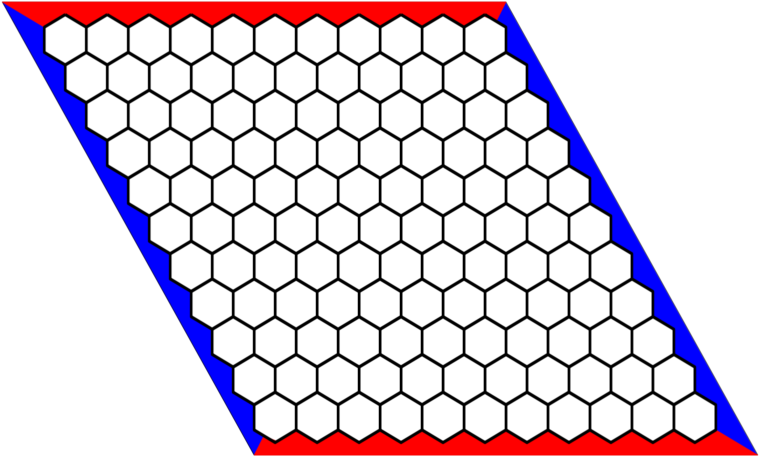
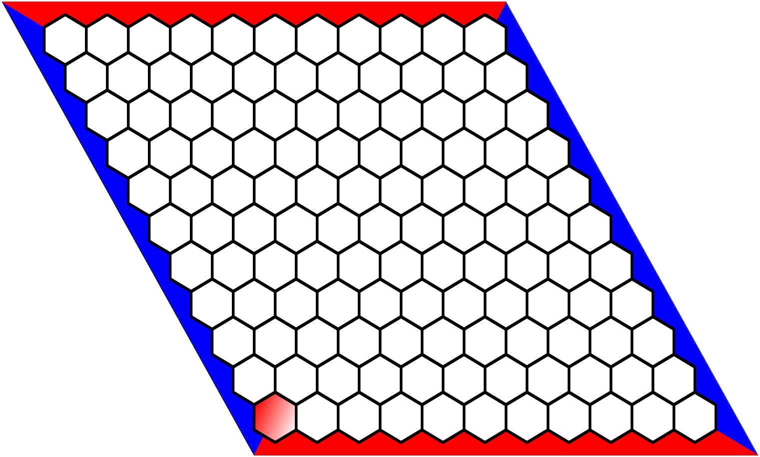
Le jeu de Hex et ses aspects mathématiques

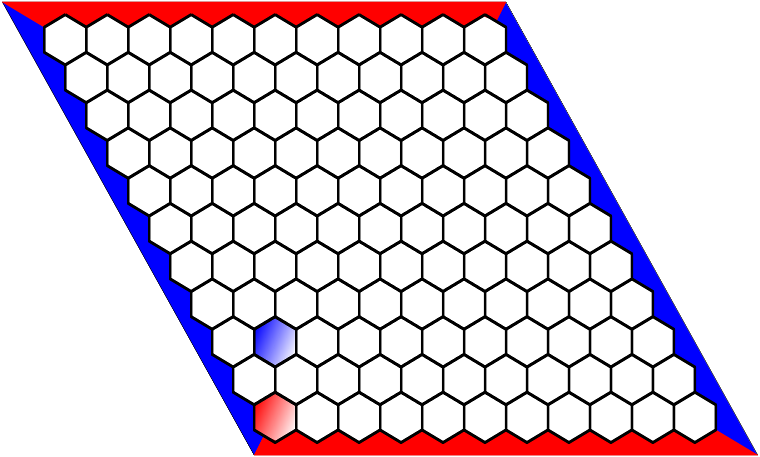
Antonín Procházka

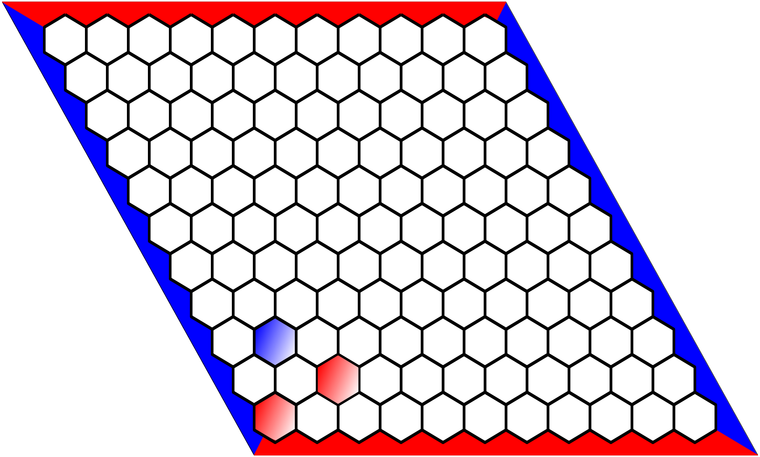
Laboratoire de Mathématiques de Besançon
Université Franche-Comté

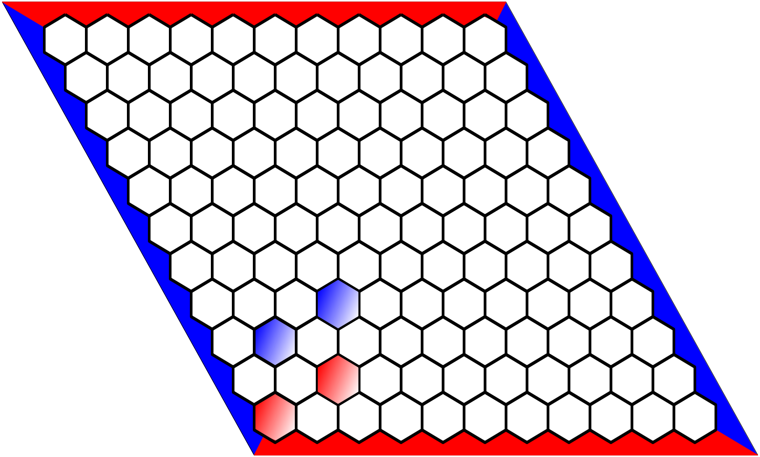
Lycée Jules Haag, 18 mars 2013

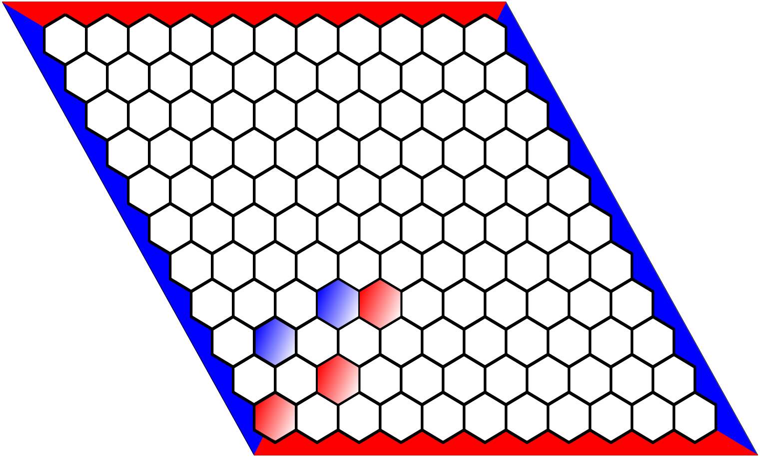


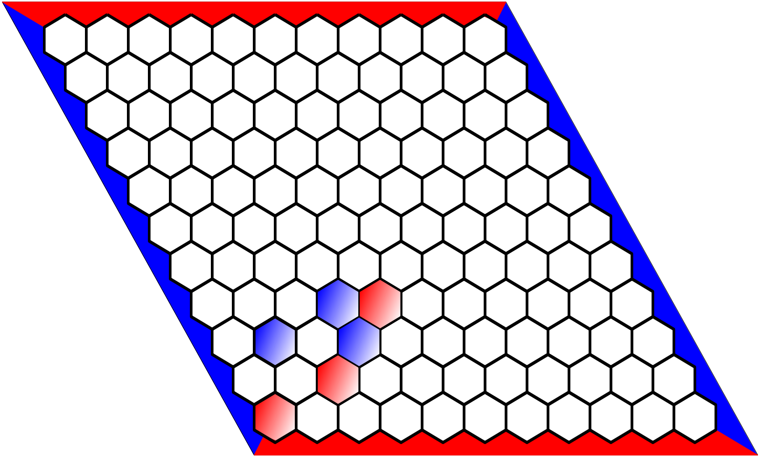


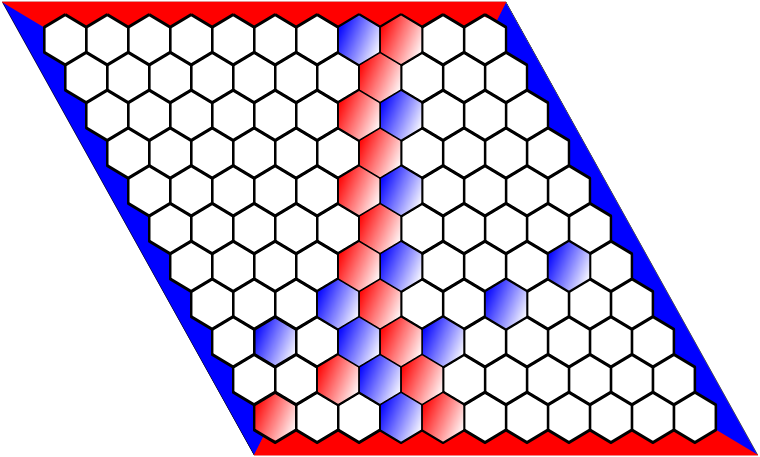


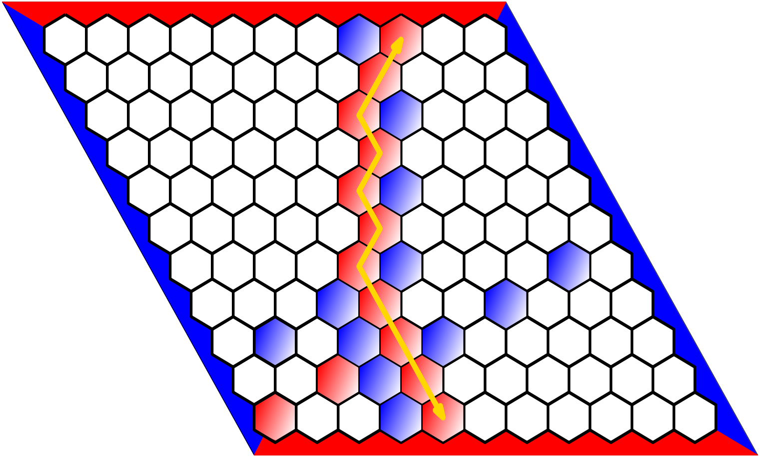












Un peu d’histoire :

- HEX est inventé en 1942 par Piet Hein (Danemark), il l’appelle *CONTACTIX*,

Un peu d'histoire :

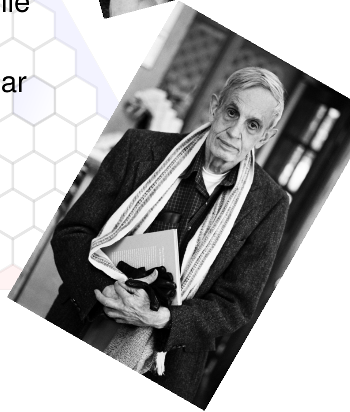
- HEX est inventé en 1942 par Piet Hein (Danemark), il l'appelle *CONTACTIX*,
- et indépendamment en 1948 par John Nash (États-Unis), ses amis appellent le jeu *NASH*

Un peu d'histoire :

- HEX est inventé en 1942 par Piet Hein (Danemark), il l'appelle *CONTACTIX*,
- et indépendamment en 1948 par John Nash (États-Unis), ses amis appellent le jeu *NASH*

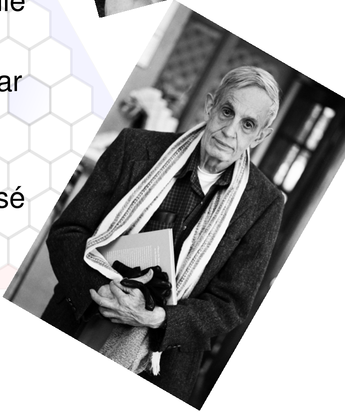
Un peu d'histoire :

- HEX est inventé en 1942 par Piet Hein (Danemark), il l'appelle *CONTACTIX*,
- et indépendamment en 1948 par John Nash (États-Unis), ses amis appellent le jeu *NASH*

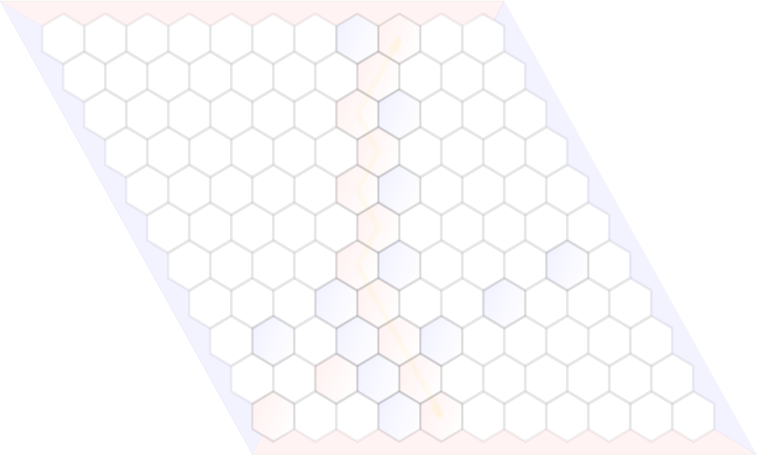


Un peu d'histoire :

- HEX est inventé en 1942 par Piet Hein (Danemark), il l'appelle *CONTACTIX*,
- et indépendamment en 1948 par John Nash (États-Unis), ses amis appellent le jeu *NASH*
- en 1952 le jeu est commercialisé comme HEX



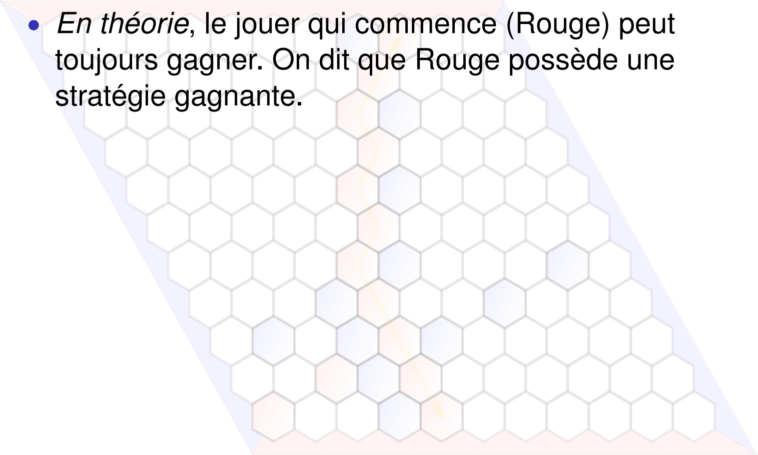
Comment jouer pour gagner ?



Comment jouer pour gagner ?

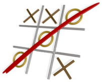
Il faut commencer !

- *En théorie*, le jouer qui commence (Rouge) peut toujours gagner. On dit que Rouge possède une stratégie gagnante.



Comment jouer pour gagner ?

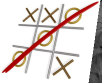
Il faut commencer !

- *En théorie*, le jouer qui commence (Rouge) peut toujours gagner. On dit que Rouge possède une stratégie gagnante.
- C'est *pareil* pour le tic-tac-toe (morpion) 

Comment jouer pour gagner ?

Il faut commencer !

- *En théorie*, le jouer qui commence (Rouge) peut toujours gagner. On dit que Rouge possède une stratégie gagnante.
- C'est *pareil* pour le tic-tac-toe (morpion)

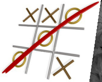


- et les échecs.

Comment jouer pour gagner ?

Il faut commencer !

- *En théorie*, le jouer qui commence (Rouge) peut toujours gagner. On dit que Rouge possède une stratégie gagnante.
- C'est *pareil* pour le tic-tac-toe (morpion)
- et les échecs.

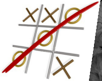


Quel sens de jouer si celui qui commence gagne toujours ?

Comment jouer pour gagner ?

Il faut commencer !

- *En théorie*, le jouer qui commence (Rouge) peut toujours gagner. On dit que Rouge possède une stratégie gagnante.
- C'est *pareil* pour le tic-tac-toe (morpion)
- et les échecs.



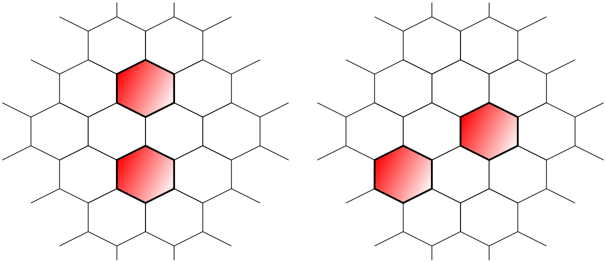
Quel sens de jouer si celui qui commence gagne toujours ?

- Pour les tabliers 10×10 et plus grands, personne connaît la stratégie gagnante.

Comment jouer alors ?

Une astuce

Essayez construire des ponts :



..et empêchez vos adversaires de les construire.

Qu'est-ce que ça veut dire “stratégie gagnante” ?

Qu’est-ce que ça veut dire “stratégie gagnante” ?

- Soit :
  Ω ... l’ensemble de toutes possibles configurations de pions dans le jeu.
  Ω_R ... l’ensemble des configurations "tour de Rouge"
  Ω_B ... l’ensemble des configurations "tour de Bleu"
  o ... la configuration "tablier vide"

Qu'est-ce que ça veut dire “stratégie gagnante” ?

- Soit :
  Ω ... l'ensemble de toutes possibles configurations de pions dans le jeu.
  Ω_R ... l'ensemble des configurations "tour de Rouge"
  Ω_B ... l'ensemble des configurations "tour de Bleu"
  o ... la configuration "tablier vide"
- On a alors $\Omega = \Omega_R \cup \Omega_B$ et $o \in \Omega_R$.

Qu'est-ce que ça veut dire “stratégie gagnante” ?

- Soit :
  Ω ... l'ensemble de toutes possibles configurations de pions dans le jeu.
  Ω_R ... l'ensemble des configurations "tour de Rouge"
  Ω_B ... l'ensemble des configurations "tour de Bleu"
  o ... la configuration "tablier vide"
- On a alors $\Omega = \Omega_R \cup \Omega_B$ et $o \in \Omega_R$.
- On dénote $\tau \in \mathrm{succ}(\omega)$ pour $\omega, \tau \in \Omega$ tels que on peut accéder de la configuration ω à la configuration τ en un seul coup.

Qu'est-ce que ça veut dire "stratégie gagnante" ?

- Soit :
  Ω ... l'ensemble de toutes possibles configurations de pions dans le jeu.
  Ω_R ... l'ensemble des configurations "tour de Rouge"
  Ω_B ... l'ensemble des configurations "tour de Bleu"
  o ... la configuration "tablier vide"
- On a alors $\Omega = \Omega_R \cup \Omega_B$ et $o \in \Omega_R$.
- On dénote $\tau \in \mathrm{succ}(\omega)$ pour $\omega, \tau \in \Omega$ tels que on peut accéder de la configuration ω à la configuration τ en un seul coup.
- Une stratégie pour le joueur Rouge est une fonction $S : \Omega_R \to \Omega_B$ qui respecte les règles du HEX, c'est à dire $S(\omega) \in \mathrm{succ}(\omega)$.

Qu'est-ce que ça veut dire “stratégie gagnante” ?

- Soit :
  Ω ... l'ensemble de toutes possibles configurations de pions dans le jeu.
  Ω_R ... l'ensemble des configurations "tour de Rouge"
  Ω_B ... l'ensemble des configurations "tour de Bleu"
  o ... la configuration "tablier vide"
- On a alors $\Omega = \Omega_R \cup \Omega_B$ et $o \in \Omega_R$.
- On dénote $\tau \in \mathrm{succ}(\omega)$ pour $\omega, \tau \in \Omega$ tels que on peut accéder de la configuration ω à la configuration τ en un seul coup.
- Une stratégie pour le joueur Bleu est une fonction $S : \Omega_B \to \Omega_R$ qui respecte les règles du HEX, c'est à dire $S(\omega) \in \mathrm{succ}(\omega)$.

On divise les configurations terminales selon son vainqueur en 3 sous-ensembles disjoints :

$$R = \{\text{Rouge gagne}\} \quad B = \{\text{Bleu gagne}\} \quad N = \{\text{jeux nuls}\}$$

On divise les configurations terminales selon son vainqueur en 3 sous-ensembles disjoints :

$$R = \{\text{Rouge gagne}\} \quad B = \{\text{Bleu gagne}\} \quad N = \{\text{jeux nuls}\}$$

Une suite des configurations $(\omega_i)_{i=0}^{m} \subset \Omega$ est appelée *une partie complète* si elle satisfait

On divise les configurations terminales selon son vainqueur en 3 sous-ensembles disjoints :

$$R = \{\text{Rouge gagne}\} \quad B = \{\text{Bleu gagne}\} \quad N = \{\text{jeux nuls}\}$$

Une suite des configurations $(\omega_i)_{i=0}^{m} \subset \Omega$ est appelée *une partie complète* si elle satisfait

- $x_0 = o$

On divise les configurations terminales selon son vainqueur en 3 sous-ensembles disjoints :

$$R = \{\text{Rouge gagne}\} \quad B = \{\text{Bleu gagne}\} \quad N = \{\text{jeux nuls}\}$$

Une suite des configurations $(\omega_i)_{i=0}^{m} \subset \Omega$ est appelée *une partie complète* si elle satisfait

- $x_0 = o$
- $\omega_{i+1} \in \mathrm{succ}(\omega_i)$ pour tout $i < m$

On divise les configurations terminales selon son vainqueur en 3 sous-ensembles disjoints :

$$R = \{\text{Rouge gagne}\} \quad B = \{\text{Bleu gagne}\} \quad N = \{\text{jeux nuls}\}$$

Une suite des configurations $(\omega_i)_{i=0}^{m} \subset \Omega$ est appelée *une partie complète* si elle satisfait

- $x_0 = o$
- $\omega_{i+1} \in \mathrm{succ}(\omega_i)$ pour tout $i < m$
- $\omega_m \in R \cup B \cup N$

On divise les configurations terminales selon son vainqueur en 3 sous-ensembles disjoints :

$$R = \{\text{Rouge gagne}\} \quad B = \{\text{Bleu gagne}\} \quad N = \{\text{jeux nuls}\}$$

Une suite des configurations $(\omega_i)_{i=0}^{m} \subset \Omega$ est appelée *une partie complète* si elle satisfait

- $x_0 = o$
- $\omega_{i+1} \in \mathrm{succ}(\omega_i)$ pour tout $i < m$
- $\omega_m \in R \cup B \cup N$
- $\omega_i \notin R \cup B \cup N$ si $i < m$

On divise les configurations terminales selon son vainqueur en 3 sous-ensembles disjoints :

$$R = \{\text{Rouge gagne}\} \quad B = \{\text{Bleu gagne}\} \quad N = \{\text{jeux nuls}\}$$

Une suite des configurations $(\omega_i)_{i=0}^m \subset \Omega$ est appelée *une partie complète* si elle satisfait

- $x_0 = o$
- $\omega_{i+1} \in \mathrm{succ}(\omega_i)$ pour tout $i < m$
- $\omega_m \in R \cup B \cup N$
- $\omega_i \notin R \cup B \cup N$ si $i < m$

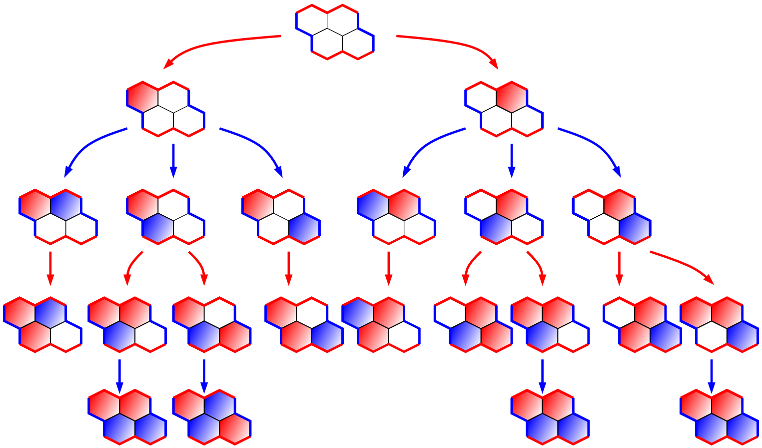
Stratégie gagnante pour Rouge

Une stratégie S de Rouge est *gagnante* si pour toute partie complète $(\omega_i)_{i=0}^m \subset \Omega$ qui satisfait

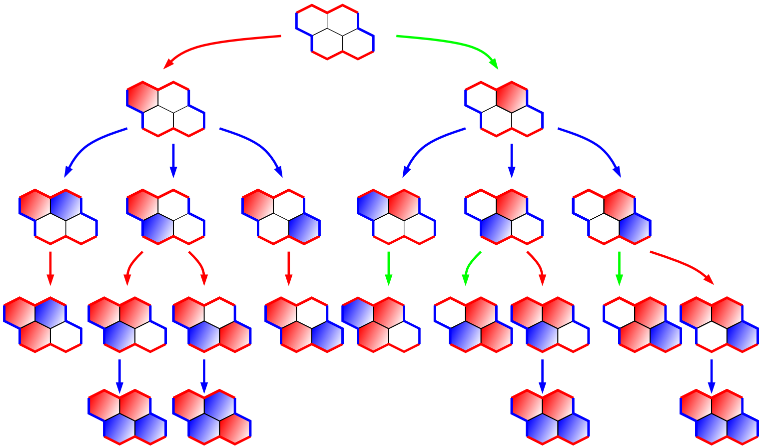
$$\omega_{2i+1} = S(\omega_{2i}) \text{ pour tout } i < m/2,$$

on a nécessairement $\omega_m \in R$.

Échauffement : cas 2×2



Échauffement : cas 2 × 2



Cas général

Peut-on faire une analyse pareille pour la taille $n \times n$?

Cas général

Peut-on faire une analyse pareille pour la taille $n \times n$?

- Théoriquement, oui.

Cas général

Peut-on faire une analyse pareille pour la taille $n \times n$?

- Théoriquement, oui.
- En pratique, c'est ingérable déjà pour les tabliers 10×10.

Cas général

Peut-on faire une analyse pareille pour la taille $n \times n$?

- Théoriquement, oui.
- En pratique, c'est ingérable déjà pour les tabliers 10×10.
- En fait, c'est seulement en 2003 que une stratégie gagnante a été trouvée pour les tabliers 9×9 (J. Yang, S. Liao, M. Pawlak).

Cas général

Peut-on faire une analyse pareille pour la taille $n \times n$?

- Théoriquement, oui.
- En pratique, c'est ingérable déjà pour les tabliers 10×10.
- En fait, c'est seulement en 2003 que une stratégie gagnante a été trouvée pour les tabliers 9×9 (J. Yang, S. Liao, M. Pawlak).

Exercice

- Trouver la stratégie gagnante pour Rouge sur le tablier 3×3.
- Et si on interdise choisir centre du tablier dans le premier coup ?

Rouge a toujours une stratégie gagnante !

Rouge a toujours une stratégie gagnante !

Preuve

1. Bleu ne peut pas avoir une stratégie gagnante.

Rouge a toujours une stratégie gagnante !

Preuve

1. Bleu ne peut pas avoir une stratégie gagnante.
2. Il suit que Rouge a une stratégie non-perdante.

Rouge a toujours une stratégie gagnante !

Preuve

1. Bleu ne peut pas avoir une stratégie gagnante.
2. Il suit que Rouge a une stratégie non-perdante.
3. Le jeu ne peut pas finir à égalité ($N = \emptyset$).

Rouge a toujours une stratégie gagnante !

Preuve

1. Bleu ne peut pas avoir une stratégie gagnante.
2. Il suit que Rouge a une stratégie non-perdante.
3. Le jeu ne peut pas finir à égalité ($N = \emptyset$).
4. Donc la stratégie non-perdante de Rouge est en fait une stratégie gagnante.

Rouge a toujours une stratégie gagnante !

Preuve

1. Bleu ne peut pas avoir une stratégie gagnante.
2. Il suit que Rouge a une stratégie non-perdante.
3. Le jeu ne peut pas finir à égalité ($N = \emptyset$).
4. Donc la stratégie non-perdante de Rouge est en fait une stratégie gagnante.

Preuve par contradiction

- On suppose que Bleu a une stratégie gagnante S.

Rouge a toujours une stratégie gagnante !

Preuve

1. Bleu ne peut pas avoir une stratégie gagnante.
2. Il suit que Rouge a une stratégie non-perdante.
3. Le jeu ne peut pas finir à égalité ($N = \emptyset$).
4. Donc la stratégie non-perdante de Rouge est en fait une stratégie gagnante.

Preuve par contradiction

- On suppose que Bleu a une stratégie gagnante S.
- Rouge peut “voler” la stratégie S : il utilisera une stratégie $\widehat{S}$ issue de S par inversion de couleurs.

Rouge a toujours une stratégie gagnante !

Preuve

1. Bleu ne peut pas avoir une stratégie gagnante.
2. Il suit que Rouge a une stratégie non-perdante.
3. Le jeu ne peut pas finir à égalité ($N = \emptyset$).
4. Donc la stratégie non-perdante de Rouge est en fait une stratégie gagnante.

Preuve par contradiction

- On suppose que Bleu a une stratégie gagnante S.
- Rouge peut “voler” la stratégie S : il utilisera une stratégie $\widehat{S}$ issue de S par inversion de couleurs.
- Tout jeu doit finir (au plus tard après $n \times n$ tours) : on arrive à contradiction.

Rouge a toujours une stratégie gagnante !

Preuve

1. Bleu ne peut pas avoir une stratégie gagnante.
2. Il suit que Rouge a une stratégie non-perdante.
3. Le jeu ne peut pas finir à égalité ($N = \emptyset$).
4. Donc la stratégie non-perdante de Rouge est en fait une stratégie gagnante.

Lemme

Soit $\omega \in \Omega_R$. Bleu a une stratégie gagnante à partir de ω ssi $\forall \omega' \in \mathrm{succ}(\omega) \exists \omega'' \in \mathrm{succ}(\omega')$ tel que Bleu a une stratégie gagnante à partir de ω''.

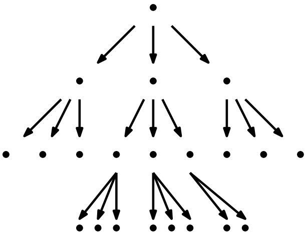
Rouge a toujours une stratégie gagnante !

Preuve

1. Bleu ne peut pas avoir une stratégie gagnante.
2. Il suit que Rouge a une stratégie non-perdante.
3. Le jeu ne peut pas finir à égalité ($N = \emptyset$).
4. Donc la stratégie non-perdante de Rouge est en fait une stratégie gagnante.

Lemme

Soit $\omega \in \Omega_R$. Bleu a une stratégie gagnante à partir de ω ssi $\forall \omega' \in \mathrm{succ}(\omega) \exists \omega'' \in \mathrm{succ}(\omega')$ tel que Bleu a une stratégie gagnante à partir de ω''.



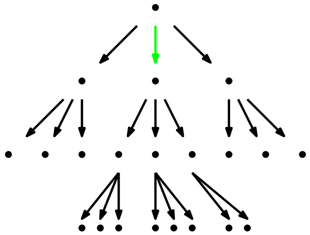
Rouge a toujours une stratégie gagnante !

Preuve

1. Bleu ne peut pas avoir une stratégie gagnante.
2. Il suit que Rouge a une stratégie non-perdante.
3. Le jeu ne peut pas finir à égalité ($N = \emptyset$).
4. Donc la stratégie non-perdante de Rouge est en fait une stratégie gagnante.

Lemme

Soit $\omega \in \Omega_R$. Bleu a une stratégie gagnante à partir de ω ssi $\forall \omega' \in \mathrm{succ}(\omega) \exists \omega'' \in \mathrm{succ}(\omega')$ tel que Bleu a une stratégie gagnante à partir de ω''.



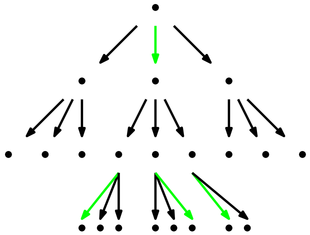
Rouge a toujours une stratégie gagnante !

Preuve

1. Bleu ne peut pas avoir une stratégie gagnante.
2. Il suit que Rouge a une stratégie non-perdante.
3. Le jeu ne peut pas finir à égalité ($N = \emptyset$).
4. Donc la stratégie non-perdante de Rouge est en fait une stratégie gagnante.

Lemme

Soit $\omega \in \Omega_R$. *Bleu a une stratégie gagnante à partir de* ω *ssi* $\forall \omega' \in \mathrm{succ}(\omega) \exists \omega'' \in \mathrm{succ}(\omega')$ *tel que Bleu a une stratégie gagnante à partir de* ω''.



Rouge a toujours une stratégie gagnante !

Preuve

1. Bleu ne peut pas avoir une stratégie gagnante.
2. Il suit que Rouge a une stratégie non-perdante.
3. Le jeu ne peut pas finir à égalité ($N = \emptyset$).
4. Donc la stratégie non-perdante de Rouge est en fait une stratégie gagnante.

- Le seul cas non-trivial arrive si après le tour $n^2 - 1$ aucun joueur n'a pas encore gagné.

Rouge a toujours une stratégie gagnante !

Preuve

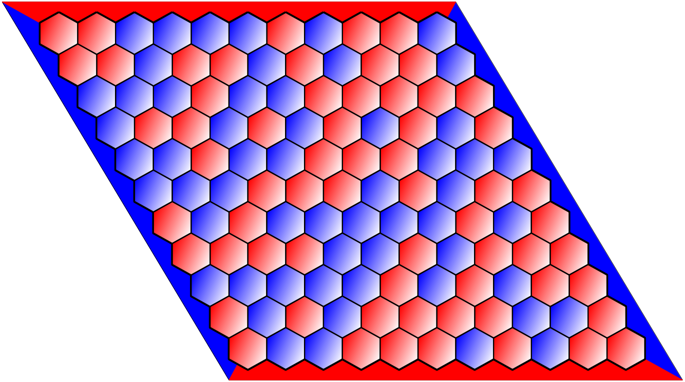
1. Bleu ne peut pas avoir une stratégie gagnante.
2. Il suit que Rouge a une stratégie non-perdante.
3. Le jeu ne peut pas finir à égalité ($N = \emptyset$).
4. Donc la stratégie non-perdante de Rouge est en fait une stratégie gagnante.

- Le seul cas non-trivial arrive si après le tour $n^2 - 1$ aucun joueur n'a pas encore gagné.
- C'est le célèbre "Théorème du jeu de Hex"

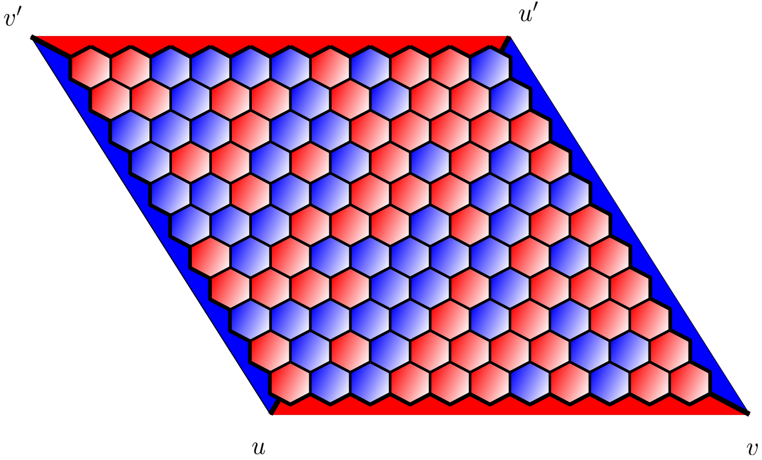
Le théorème du jeu de Hex

Théorème (J. Nash, 1952)

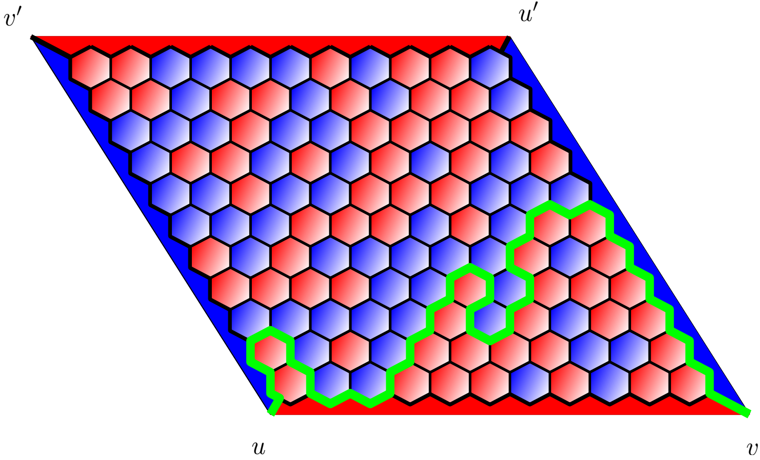
Soit $n \in \mathbb{N}$. Si toute case du tablier $n \times n$ est peint en rouge ou bleu, alors il existe soit un chemin rouge qui connecte les deux côtés rouges, soit un chemin bleu qui connecte les deux côtés bleus.



Preuve (selon David Gale, 1979)



Preuve (selon David Gale, 1979)



Remarques

- Le fait que au moins un de deux joueurs possède une stratégie non-perdante reste vrai pour tout jeu fini d'information parfaite (théorème de Zermelo).

Remarques

- Le fait que au moins un de deux joueurs possède une stratégie non-perdante reste vrai pour tout jeu fini d'information parfaite (théorème de Zermelo).
- Le fait que le deuxième joueur ne peut pas avoir une stratégie gagnante est vrai si le jeu est de plus symétrique.

Remarques

- Le fait que au moins un de deux joueurs possède une stratégie non-perdante reste vrai pour tout jeu fini d'information parfaite (théorème de Zermelo).
- Le fait que le deuxième joueur ne peut pas avoir une stratégie gagnante est vrai si le jeu est de plus symétrique.
- Ces résultats appartiennent à la *théorie des jeux*.

Remarques

- Le fait que au moins un de deux joueurs possède une stratégie non-perdante reste vrai pour tout jeu fini d'information parfaite (théorème de Zermelo).
- Le fait que le deuxième joueur ne peut pas avoir une stratégie gagnante est vrai si le jeu est de plus symétrique.
- Ces résultats appartiennent à la *théorie des jeux*.
- Le théorème du jeu de Hex implique le théorème fondamental suivant, qui appartient à la *topologie*.

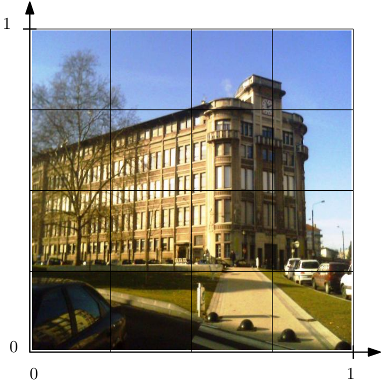
Remarques

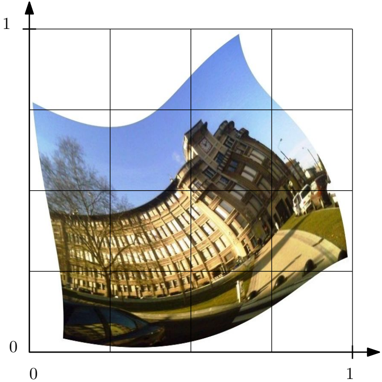
- Le fait que au moins un de deux joueurs possède une stratégie non-perdante reste vrai pour tout jeu fini d'information parfaite (théorème de Zermelo).
- Le fait que le deuxième joueur ne peut pas avoir une stratégie gagnante est vrai si le jeu est de plus symétrique.
- Ces résultats appartiennent à la *théorie des jeux*.
- Le théorème du jeu de Hex implique le théorème fondamental suivant, qui appartient à la *topologie*.

Théorème (du point fixe de Brouwer,1909)

Soit $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ *une fonction continue. Alors il existe* $x \in [0,1]^2$ *tel que* $f(x) = x$.

Au moins un point n'a pas bougé

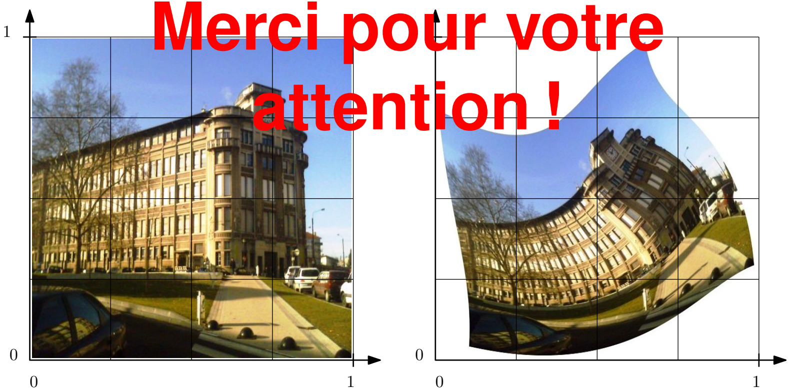




Exercice : trouvez lui.

Au moins un point n’a pas bougé

Merci pour votre attention !



Exercice : trouvez lui.