Comment effectuer une infinité d'additions?

Lycée Jules Haag, Besançon, 12 avril 2012

Le paradoxe de Zénon.

Le paradoxe de Zénon.

Usain Bolt fait la course avec une tortue. Bolt court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s...

Le paradoxe de Zénon.

Usain Bolt fait la course avec une tortue. Bolt court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Le paradoxe de Zénon.

Usain Bolt fait la course avec une tortue. Bolt court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Mais Bolt laisse 100 m d'avance à la tortue au départ.

Le paradoxe de Zénon.

Usain Bolt fait la course avec une tortue. Bolt court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Mais Bolt laisse 100 m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que Bolt parcourt ses 100 m de retard, la tortue s'éloigne de

Le paradoxe de Zénon.

Usain Bolt fait la course avec une tortue. Bolt court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Mais Bolt laisse 100 m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que Bolt parcourt ses 100 m de retard, la tortue s'éloigne de 10 m.

Le paradoxe de Zénon.

Usain Bolt fait la course avec une tortue. Bolt court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Mais Bolt laisse 100 m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que Bolt parcourt ses 100 m de retard, la tortue s'éloigne de 10 m.

Puis, Bolt parcourt les 10 m qui lui manquent, pendant que la tortue s'éloigne de 1m....

Le paradoxe de Zénon.

Usain Bolt fait la course avec une tortue. Bolt court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Mais Bolt laisse 100 m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que Bolt parcourt ses 100 m de retard, la tortue s'éloigne de 10 m.

Puis, Bolt parcourt les 10 m qui lui manquent, pendant que la tortue s'éloigne de 1m.... et ainsi de suite...

Le paradoxe de Zénon.

Usain Bolt fait la course avec une tortue. Bolt court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Mais Bolt laisse 100 m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que Bolt parcourt ses 100 m de retard, la tortue s'éloigne de 10 m.

Puis, Bolt parcourt les 10 m qui lui manquent, pendant que la tortue s'éloigne de 1m.... et ainsi de suite...

Conclusion :

Le paradoxe de Zénon.

Usain Bolt fait la course avec une tortue. Bolt court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Mais Bolt laisse 100 m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que Bolt parcourt ses 100 m de retard, la tortue s'éloigne de 10 m.

Puis, Bolt parcourt les 10 m qui lui manquent, pendant que la tortue s'éloigne de 1m.... et ainsi de suite...

Conclusion : Bolt ne rattrappe jamais la tortue ! !

Le paradoxe de Zénon.

Usain Bolt fait la course avec une tortue. Bolt court à la vitesse de 10 m/s et la tortue à la vitesse de 1 m/s... C'est une tortue de compétition !

Mais Bolt laisse 100 m d'avance à la tortue au départ.

Pendant que Bolt parcourt ses 100 m de retard, la tortue s'éloigne de 10 m.

Puis, Bolt parcourt les 10 m qui lui manquent, pendant que la tortue s'éloigne de 1m.... et ainsi de suite...

Conclusion : Bolt ne rattrappe jamais la tortue ! !

Cherchez l'erreur ! !

Un autre raisonnement

Un autre raisonnement

Notons $f(t)$ la position de Bolt à l'instant t et convenons que $f(0) = 0$. Alors

Un autre raisonnement

Notons $f(t)$ la position de Bolt à l'instant t et convenons que $f(0) = 0$. Alors

$f(t) = 10t.$

Un autre raisonnement

Notons $f(t)$ la position de Bolt à l'instant t et convenons que $f(0) = 0$. Alors

$f(t) = 10t.$

Notons $g(t)$ la position de la tortue à l'instant t. On a donc

Un autre raisonnement

Notons $f(t)$ la position de Bolt à l'instant t et convenons que $f(0) = 0$. Alors

$f(t) = 10t$.

Notons $g(t)$ la position de la tortue à l'instant t. On a donc

$g(0) = 100$

Un autre raisonnement

Notons $f(t)$ la position de Bolt à l'instant t et convenons que $f(0) = 0$. Alors

$f(t) = 10t$.

Notons $g(t)$ la position de la tortue à l'instant t. On a donc

$g(0) = 100$ et $g(t) = 100 + t$.

Un autre raisonnement

Notons $f(t)$ la position de Bolt à l'instant t et convenons que $f(0) = 0$. Alors

$f(t) = 10t$.

Notons $g(t)$ la position de la tortue à l'instant t. On a donc

$g(0) = 100$ et $g(t) = 100 + t$.

Résolvons $f(t) = g(t)$...

Un autre raisonnement

Notons $f(t)$ la position de Bolt à l'instant t et convenons que $f(0) = 0$. Alors

$f(t) = 10t$.

Notons $g(t)$ la position de la tortue à l'instant t. On a donc

$g(0) = 100$ et $g(t) = 100 + t$.

Résolvons $f(t) = g(t)$... Facile !

Un autre raisonnement

Notons $f(t)$ la position de Bolt à l'instant t et convenons que $f(0) = 0$. Alors

$f(t) = 10t$.

Notons $g(t)$ la position de la tortue à l'instant t. On a donc

$g(0) = 100$ et $g(t) = 100 + t$.

Résolvons $f(t) = g(t)$... Facile !

$10t = 100 + t \Leftrightarrow 9t = 100 \Leftrightarrow t = \frac{100}{9}$

Un autre raisonnement

Notons $f(t)$ la position de Bolt à l'instant t et convenons que $f(0) = 0$. Alors

$f(t) = 10t$.

Notons $g(t)$ la position de la tortue à l'instant t. On a donc

$g(0) = 100$ et $g(t) = 100 + t$.

Résolvons $f(t) = g(t)$... Facile !

$10t = 100 + t \Leftrightarrow 9t = 100 \Leftrightarrow t = \frac{100}{9} = 11,1111..$

Un autre raisonnement

Notons $f(t)$ la position de Bolt à l'instant t et convenons que $f(0) = 0$. Alors

$f(t) = 10t$.

Notons $g(t)$ la position de la tortue à l'instant t. On a donc

$g(0) = 100$ et $g(t) = 100 + t$.

Résolvons $f(t) = g(t)$... Facile !

$10t = 100 + t \Leftrightarrow 9t = 100 \Leftrightarrow t = \frac{100}{9} = 11,1111..$

Conclusion : Bolt rattrape la tortue

Un autre raisonnement

Notons $f(t)$ la position de Bolt à l'instant t et convenons que $f(0) = 0$. Alors

$f(t) = 10t$.

Notons $g(t)$ la position de la tortue à l'instant t. On a donc

$g(0) = 100$ et $g(t) = 100 + t$.

Résolvons $f(t) = g(t)$... Facile !

$10t = 100 + t \Leftrightarrow 9t = 100 \Leftrightarrow t = \frac{100}{9} = 11,1111..$

Conclusion : Bolt rattrappe la tortue ...Ouf ! !

Reprenons le premier raisonnement en faisant attention !

Reprenons le premier raisonnement en faisant attention !

Temps écoulé (en secondes) après

Reprenons le premier raisonnement en faisant attention !

Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape :

Reprenons le premier raisonnement en faisant attention !

Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.

Reprenons le premier raisonnement en faisant attention !

Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes :

Reprenons le premier raisonnement en faisant attention !

Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10(1 + \frac{1}{10}) = 11$.

Reprenons le premier raisonnement en faisant attention !

Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10(1 + \frac{1}{10}) = 11$.
- 3 étapes :

Reprenons le premier raisonnement en faisant attention !

Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10(1 + \frac{1}{10}) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}) = 11,1$.

Reprenons le premier raisonnement en faisant attention !

Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10(1 + \frac{1}{10}) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}) = 11,1$.
- n étapes :

Reprenons le premier raisonnement en faisant attention !

Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10(1 + \frac{1}{10}) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}) = 11,1$.
- n étapes :

$$t_n = 10(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^{n-1}}) =$$

Reprenons le premier raisonnement en faisant attention !

Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10(1 + \frac{1}{10}) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}) = 11,1$.
- n étapes :

$$t_n = 10(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^{n-1}}) = 10\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{10^k} =$$

Reprenons le premier raisonnement en faisant attention !

Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10(1 + \frac{1}{10}) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}) = 11,1$.
- n étapes :

$$t_n = 10(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^{n-1}}) = 10\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{10^k} = 10\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}$$

Reprenons le premier raisonnement en faisant attention !

Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10(1 + \frac{1}{10}) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}) = 11,1$.
- n étapes :

$$t_n = 10(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{10^{n-1}}) = 10 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10^k} = 10 \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{100}{9}(1 - \frac{1}{10^n}).$$

Reprenons le premier raisonnement en faisant attention !

Temps écoulé (en secondes) après

- 1 étape : $t_1 = 10$.
- 2 étapes : $t_2 = 10 + 1 = 10(1 + \frac{1}{10}) = 11$.
- 3 étapes : $t_3 = 10 + 1 + \frac{1}{10} = 10(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}) = 11,1$.
- n étapes :

$$t_n = 10(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{n-1}}) = 10 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{10^k} = 10 \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{100}{9}(1 - \frac{1}{10^n}).$$

La suite $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ tend vers $\frac{100}{9}$!

Conclusion :

Conclusion : il n’y a pas de contradiction !

Conclusion : il n'y a pas de contradiction !

Zénon avait découpé un temps fini en une infinité de morceaux :

$$10 + 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + ... + 10^{-n} + ... = \frac{100}{9}.$$

Conclusion : il n'y a pas de contradiction !

Zénon avait découpé un temps fini en une infinité de morceaux :

$$10 + 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + ... + 10^{-n} + ... = \frac{100}{9}.$$

On a effectué une infinité d'additions.

Conclusion : il n'y a pas de contradiction !

Zénon avait découpé un temps fini en une infinité de morceaux :

$$10 + 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-n} + \dots = \frac{100}{9}.$$

On a effectué une infinité d'additions.

On note :

$$10 + 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{1-n} = \frac{100}{9}.$$

La série harmonique

La série harmonique

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

La série harmonique

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

$$= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{2}{3}) + (1 - \frac{3}{4}) + ... + (1 - \frac{n-1}{n}) + ..$$

La série harmonique

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

$$= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{2}{3}) + (1 - \frac{3}{4}) + ... + (1 - \frac{n-1}{n}) + ..$$

$$= 1 + 1 + (-\frac{1}{2} + 1) + (-\frac{2}{3} + 1) + (-\frac{3}{4} + 1) + ...(-\frac{n-1}{n} + 1) + ...$$

La série harmonique

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

$$= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{2}{3}) + (1 - \frac{3}{4}) + ... + (1 - \frac{n-1}{n}) + ..$$

$$= 1 + 1 + (-\frac{1}{2} + 1) + (-\frac{2}{3} + 1) + (-\frac{3}{4} + 1) + ...(-\frac{n-1}{n} + 1) + ...$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

La série harmonique

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

$$= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{2}{3}) + (1 - \frac{3}{4}) + ... + (1 - \frac{n-1}{n}) + ..$$

$$= 1 + 1 + (-\frac{1}{2} + 1) + (-\frac{2}{3} + 1) + (-\frac{3}{4} + 1) + ...(-\frac{n-1}{n} + 1) + ...$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

$$= 1 + S.$$

La série harmonique

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

$$= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{2}{3}) + (1 - \frac{3}{4}) + ... + (1 - \frac{n-1}{n}) + ..$$

$$= 1 + 1 + (-\frac{1}{2} + 1) + (-\frac{2}{3} + 1) + (-\frac{3}{4} + 1) + ...(-\frac{n-1}{n} + 1) + ...$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

$$= 1 + S.$$

AAAAARGHHH ! !

Conclusion :

Conclusion : $S = 1 + S = 2 + S = 3 + S = ...$

Conclusion : $S = 1 + S = 2 + S = 3 + S = ...$

On devine que $S = +\infty$.

Conclusion : $S = 1 + S = 2 + S = 3 + S = ...$

On devine que $S = +\infty$.

Si on note

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

Conclusion : $S = 1 + S = 2 + S = 3 + S = ...$

On devine que $S = +\infty$.

Si on note

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

On dit que la suite $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ tend vers $+\infty$.

La série harmonique alternée

La série harmonique alternée

Notons

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

La série harmonique alternée

Notons

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

$$S_{2n} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}).$$

La série harmonique alternée

Notons

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

$$S_{2n} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}).$$

La suite $(S_{2n})_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante.

La série harmonique alternée

Notons

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

$$S_{2n} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}).$$

La suite $(S_{2n})_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante.

$$S_{2n+1} = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + .. + (-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}).$$

La série harmonique alternée

Notons

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

$$S_{2n} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + ... + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}).$$

La suite $(S_{2n})_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante.

$$S_{2n+1} = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) + .. + (-\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}).$$

La suite $(S_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ est une suite décroissante.

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}.$$

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}.$$

Donc $S_{2n+1} - S_{2n} > 0$ et tend vers 0.

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}.$$

Donc $S_{2n+1} - S_{2n} > 0$ et tend vers 0.

Conclusion :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}.$$

Donc $S_{2n+1} - S_{2n} > 0$ et tend vers 0.

Conclusion : les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) tendent vers la même limite S et donc la suite (S_n) tend vers S.

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}.$$

Donc $S_{2n+1} - S_{2n} > 0$ et tend vers 0.

Conclusion : les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) tendent vers la même limite S et donc la suite (S_n) tend vers S.

Tout va bien, on peut effectuer cette infinité d'additions et écrire :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + ... = S.$$

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}.$$

Donc $S_{2n+1} - S_{2n} > 0$ et tend vers 0.

Conclusion : les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) tendent vers la même limite S et donc la suite (S_n) tend vers S.

Tout va bien, on peut effectuer cette infinité d'additions et écrire :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + ... = S.$$

On peut même encadrer S : $S_2 < S < S_3 \Rightarrow \frac{1}{2} < S < \frac{5}{6}$.

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1}.$$

Donc $S_{2n+1} - S_{2n} > 0$ et tend vers 0.

Conclusion : les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) tendent vers la même limite S et donc la suite (S_n) tend vers S.

Tout va bien, on peut effectuer cette infinité d'additions et écrire :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + ... = S.$$

On peut même encadrer S : $S_2 < S < S_3 \Rightarrow \frac{1}{2} < S < \frac{5}{6}$.
En fait $S = \log 2 \approx 0,693147..$

Tout va bien ?..

Tout va bien ?..Pas si sûr !

Tout va bien ?..Pas si sûr !

$$1 - \frac{1}{2} = 2(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4})$$

Tout va bien ?..Pas si sûr !

$$1 - \frac{1}{2} = 2(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4})$$

+

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8})$$

Tout va bien ?..Pas si sûr !

$$1 - \frac{1}{2} = 2(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4})$$

+

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8})$$

+

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 2(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n)})$$

Tout va bien ?..Pas si sûr !

$$1 - \frac{1}{2} = 2(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4})$$

+

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8})$$

+

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 2(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n)})$$

D'où

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... =$$

Tout va bien ?..Pas si sûr !

$$1 - \frac{1}{2} = 2(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4})$$

$+$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 2(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8})$$

$+$

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 2(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n)})$$

D'où

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = 2(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots)$$

Tout va bien ?..Pas si sûr !

$$1-\frac{1}{2}=2(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})$$

$+$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=2(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})$$

$+$

$$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=2(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n)})$$

D'où

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=2(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots)$$

et donc

$$S=2S.$$

Tout va bien ?..Pas si sûr !

$$1-\frac{1}{2}=2(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})$$

+

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=2(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})$$

+

$$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=2(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n)})$$

D'où

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=2(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots)$$

et donc

$$S=2S.$$

AAAAARGHHH ! !

Tout va bien ?..Pas si sûr !

$$1-\frac{1}{2}=2(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})$$

+

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=2(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})$$

+

$$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=2(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n)})$$

D'où

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=2(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots)$$

et donc

$$S=2S.$$

AAAAARGHHH ! ! Le résultat d'une addition ne devrait pas dépendre de l'ordre de sommation !