!

REFLEXIVITE ET NORMES DUALES POSSEDANT LA PROPRIETE UNIFORME DE KADEC-KLEE

Gilles LANCIEN

RESUME : Dans cette note, nous exhibons un espace non réflexif, l'espace de James J, tel que J et J^* admettent des normes équivalentes dont les normes duales possèdent la propriété de Kadec-Klee uniforme pour la topologie préfaible.

1. INTRODUCTION :

Dans ce paragraphe, X désignera un espace de Banach, X^* son dual, B_X sa boule unité fermée et S_X sa sphère unité. Nous allons tout d'abord donner la définition de la propriété uniforme de Kadec-Klee.

DEFINITION 1.1. *Soit $(X, ||\ ||)$ un espace de Banach.*

i) X a la propriété uniforme de Kadec-Klee (notée UKK), si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que : si pour tout $\sigma(X, X^*)$-voisinage V de x, diam$(V \cap B_X) \geq \varepsilon$, alors $||x|| \leq 1 - \delta$.

ii) Sur X^*, on définit de façon analogue la propriété uniforme de Kadec-Klee pour la topologie préfaible (notée $\sigma(X^*, X)$-UKK).

Ces définitions étendent les définitions d'origine introduites par R. Huff [H] en termes de suites faiblement ou préfaiblement convergentes. On peut d'ailleurs remarquer que si X est un espace de Banach séparable, alors X^* possède $\sigma(X^*, X)$-UKK si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$\forall (x_n^*)_{n\geq 0} \subset B_{X^*}$ et $\forall x^* \in B_{X^*}$, $(x_n^* \overset{\sigma(X^*,X)}{\longrightarrow} x^*$ et $\forall\ n\ ||x_n^* - x^*|| > \varepsilon) \Rightarrow ||x^*|| > 1 - \delta.$

Il est naturel de comparer ces nouvelles notions avec la notion classique de convexité uniforme. Il est facile de vérifier qu'une norme uniformément convexe est UKK et préfaiblement UKK si X est un dual. La réciproque est très largement fausse puisque, par exemple, la norme naturelle de $l_1(\mathbb{N})$ est $\sigma(l_1(\mathbb{N}), c_0(\mathbb{N}))$-UKK et donc UKK. Ces propriétés sont toujours différentes si on impose à X d'être réflexif : en effet, $(\sum_{n\geq 1} l_1^n)_{l_2}$ est réflexif, possède la propriété UKK mais n'est pas super-réflexif puisque $l_1(\mathbb{N})$ y est finiment représentable, donc ne possède aucune norme équivalente uniformément convexe (en ce qui concerne les espaces super-réflexifs, nous renvoyons le lecteur aux travaux de R.C. James [J1], P. Enflo [E] et G. Pisier [Pi]). Il faut en fait interpréter la propriété UKK comme une propriété asymptotique de convexité uniforme. L'origine de cette appellation s'explique de la façon suivante : cette définition signifie que la topologie de la norme et la topologie faible (ou préfaible) coïncident "uniformément" sur S_X (la propriété de Kadec-Klee étant justement définie par : les topologies forte et faible coïncident sur S_X).

Le thème de cet article est un phénomène bien connu en géométrie des espaces de Banach, que l'on peut shématiser ainsi : l'existence de normes équivalentes suffisamment convexes, surtout si ces normes sont duales ou biduales, implique de "bonnes" propriétés de l'espaces, telles que la réflexivité ou être un espace d'Asplund. Quelques exemples parmi les plus classiques sont : Si X est uniformément convexe, alors X est super-réflexif ; si X^{**} est faiblement localement uniformément convexe, alors X est réflexif ; si X^* est localement uniformément convexe, alors X est un espace d'Asplund. Pour un exposé détaillé de ces questions nous renvoyons le lecteur au livre de R. Deville, G. Godefroy et V. Zizler [D-G-Z]. Rappelons simplement qu'un espace de Banach X est appelé espace d'Asplund si toute fonction convexe continue réelle définie sur un ouvert Ω de X est différentiable en tout point d'un $\mathcal{G}_\delta$ dense de Ω.

La situation est similaire en ce qui concerne la propriété $\sigma(X^*, X)$-UKK :
Si X^* possède $\sigma(X^*, X)$-UKK, il s'ensuit, d'après les résultats figurant dans [L], que X possède une norme équivalente Fréchet-différentiable et donc que X est un espace d'Asplund (cette dernière implication étant due à I. Ekeland et G. Lebourg [E-L]).
Par ailleurs, nous allons détailler la démonstration de la proposition élémentaire suivante :

PROPOSITION 1.2. *Si X^{**} possède la propriété uniforme de Kadec-Klee pour la topologie $\sigma(X^{**}, X^*)$, alors X est réflexif.*

Preuve : Supposons X non réflexif. Alors il existe $x^{**} \in X^{**} \setminus X$ tel que $||x^{**}|| = 1$. Soit $\varepsilon = \text{dist}(x^{**}, B_X) > 0$. Comme B_X est préfaiblement dense dans $B_{X^{**}}$, pour tout voisinage préfaible V de x^{**}, $\text{diam}(V \cap B_{X^{**}}) \geq \varepsilon$. D'où $||x^{**}|| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ ($\delta(\varepsilon) > 0$ provenant de la définition de la propriété UKK). Ce qui constitue une contradiction. $\square$

2. LE CAS DE L'ESPACE DE JAMES

Nous allons maintenant illustrer deux techniques de construction de normes $\sigma(X^*, X)$-UKK par l'étude de l'espace de James J, introduit dans [J2], et de son dual. Nous utiliserons la définition suivante de J :

$J = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tel que $x(n) \longrightarrow 0$ et $||x||_J = \sup\limits_{p_1 < \ldots < p_n} (\sum\limits_{i=1}^{n-1} |x(p_{i+1}) - x(p_i)|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$

Rappelons quelques propriétés essentielles de cet espace que nous utiliserons : J est de codimension 1 dans J^{**} qui peut être vu comme :

$J^{**} = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tq $(x(n))_{n \geq 0}$ est convergente et $\sup\limits_{p_1 < \ldots < p_n} (\sum\limits_{i=1}^{n-1} |x(p_{i+1}) - x(p_i)|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$.

De plus, si $x^{**} \in J^{**}$ et $x^{**}(n) \longrightarrow l$, alors $||x^{**}||^2_{J^{**}} = l^2 + ||(x^{**}(n) - l)_{n \geq 0}||^2_J$.

En particulier, J n'est pas réflexif.

Soit e_n défini par $e_n(k) = \delta_{n,k}$ pour tout k de $\mathbb{N}$. La suite $(e_n)_{n \geq 0}$ forme une base de Schauder de J. De plus, la suite (e_n^*) des formes linéaires coordonnées associées à (e_n) forme une base de Schauder de J^*.

Remarquons que $||\ ||_{J^*}$, la norme duale de $||\ ||_J$, n'est pas $\sigma(J^*, J)$-UKK : en effet, $||e_0^*||_{J^*} = ||e_0^* - e_n^*||_{J^*} = 1$ alors que $e_0^* - e_n^* \overset{\sigma(J^*,J)}{\longrightarrow} e_0^*$. Cependant nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. *J admet une norme équivalente dont la norme duale est UKK relativement à la topologie $\sigma(J^*, J)$.*

Notre construction est basée sur l'estimation suivante :

LEMME 2.2. *Soient $x_1, ..., x_n$ dans J à supports finis disjoints et consécutifs dans la base (e_n) (nous noterons ceci $x_1 \prec ... \prec x_n$). Alors $||\sum\limits_{i=1}^{n} x_i||^2 \leq 5 \sum\limits_{i=1}^{n} ||x_i||^2$.*

Preuve : Pour $x \in J$, notons $\text{supp}(x) = \{n \in \mathbb{N} : e_n^*(x) \neq 0\}$. On peut alors trouver des intervalles de $\mathbb{N}$ $[p_i, p'_i]$ pour $1 \leq i \leq n$, deux à deux disjoints et tels que : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\text{supp}(x_i) \subset [p_i, p'_i]$ (par commodité nous fixons $p_1 = 0$ et nous notons $p_{n+1} = +\infty$).

Soit maintenant $q_1 < .. < q_k$ une suite arbitraire d'entiers naturels, nous devons montrer que $\sum_{j=1}^{k-1}(y(q_j)-y(q_{j+1}))^2 \leq\ 5\sum_{i=1}^{n}||x_i||^2$, où $y=\sum_{i=1}^{n}x_i$.

Il existe une suite strictement croissante $(j_m)_{m=1}^{l}$ dans $\{1,..,k\}$ avec $j_1 = 1$ et une suite strictement croissante $(i_m)_{m=1}^{l}$ dans $\{1,..,n\}$ telles que pour tout $1 \leq m \leq l$, $\{q_{j_m},..,q_{j_{m+1}-1}\} \subset [p_{i_m}, p_{i_{m+1}})$.

Donc $\sum_{j=1}^{k-1}(y(q_j)-y(q_{j+1}))^2$

$= \sum_{j=1}^{j_2-1}(y(q_j)-y(q_{j+1}))^2 + (y(q_{j_2-1})-y(q_{j_2}))^2 + ... + \sum_{j=j_{l-1}}^{j_l-1}(y(q_j)-y(q_{j+1}))^2.$

$\forall\ 1 \leq m \leq l-1 : \ \sum_{j=j_m}^{j_{m+1}-2}(y(q_j)-y(q_{j+1}))^2 \leq ||x_{i_m}||^2$ et

$\forall\ 2 \leq m \leq l-1 :\ (y(q_{j_m-1})-y(q_{j_m}))^2 \leq 2\ y(q_{j_m-1})^2 + 2\ y(q_{j_m})^2 \leq 2||x_{i_m}||^2 + 2||x_{i_{m+1}}||^2.$

Par suite $\sum_{j=1}^{k-1}(y(q_j)-y(q_{j+1}))^2 \leq 3||x_{i_1}||^2 + 5||x_{i_2}||^2 + ... + 5||x_{i_{l-1}}||^2 + 3||x_{i_l}||^2$. D'où la conclusion du lemme. □

Preuve de la Proposition 2.1 : Grâce à un argument de dualité élémentaire on déduit du Lemme 2.2 qu'il existe $C > 0$ tel que pour tous $x_1^*,..,x_n^*$ dans J^* satisfaisant $x_1^* \prec .. \prec x_n^*$ relativement à la base (e_n^*) : $||\sum_{i=1}^{n}x_i^*||^2 \geq C\sum_{i=1}^{n}||x_i^*||^2$.

Définissons maintenant, pour $x^* \in J^*$:

$|x^*| = \mathrm{Sup}\{(\sum_{i=1}^{n}||x_i^*||^2)^{\frac{1}{2}} :\ x^* = x_1^* + .. + x_n^* \text{ et } x_1^* \prec .. \prec x_n^*\}.$

Il est clair que $||x^*|| \leq |x^*| \leq \frac{1}{\sqrt{C}}||x^*||$. De plus $|\ |$ est la norme duale d'une norme équivalente sur J : pour le prouver, il suffit de vérifier que $|\ |$ est $\sigma(J^*,J)$ semi-continue inférieurement, ce qui est immédiat.

D'autre part, $|\ |$ vérifie la propriété suivante : si $x^* \prec y^*$, alors $|x^*+y^*|^2 \geq |x^*|^2 + |y^*|^2$. De ceci il découle, par un argument classique de bosse glissante, que $|\ |$ est $\sigma(J^*,J)$-UKK. □

Remarques :

1) Cette technique de renormage a été utilisée par S. Pruss dans [Pr] pour étudier le cas réflexif. En particulier, le résultat suivant est démontré :

Soit X un espace réflexif possèdant une base de Schauder (e_n). X admet une norme équivalente UKK si et seulement si il existe une décomposition fini-dimensionnelle (E_n) de la base (e_n), $q > 1$ et $C > 0$ tels que pour tous $x_1,..,x_n$ de X à supports disjoints et consécutifs relativement à la décomposition (E_n) on a : $||\sum x_i||^q \geq C\sum ||x_i||^q$.

Il n'est pas difficile de vérifier que J ne satisfait pas ce critère.

2) Comme J n'est pas réflexif (un espace de codimension finie dans son bidual est dit quasi-réflexif), J n'admet pas de norme équivalente dont la norme biduale est $\sigma(J^{**}, J^*)$-UKK.

Malgré ces deux obstacles, nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION 2.3. *J^* admet une norme équivalente dont la norme duale est UKK relativement à la topologie $\sigma(J^{**}, J^*)$.*

En particulier, cette norme n'est duale d'aucune norme équivalente sur J et la restriction à J de sa norme duale est UKK.

Preuve : On considère le sous-espace de J^* : $H = \{x^* \in J^* : \sum_{n=0}^{\infty} x^*(e_n) = 0\}$. H^* est isométrique à J. En effet, si on note x_0^{**} l'élément de J^{**} défini par $x_0^{**}(n) = 1$ pour tout $n \geq 0$, on a que $H^\perp = \mathbb{R}x_0^{**}$ et donc que H^* est isométrique à $J^{**}/\mathbb{R}x_0^{**}$. Or il est aisé de vérifier que l'application $i : \ J^{**}/\mathbb{R}x_0^{**} \to J$ définie par

$i(x^{**} + \mathbb{R}x_0^{**}) = (x^{**}(n) - \lim_{k\to+\infty} x^{**}(k))_{n\geq 0}$ est une isométrie inversible.

Par ailleurs, si on identifie ainsi J et H^*, la topologie préfaible induite par H sur J est décrite par le critère de convergence suivant :

$x_n \overset{\sigma(J,H)}{\longrightarrow} x \Longleftrightarrow \forall\ i \neq j\ (x_n(i) - x_n(j)) \longrightarrow (x(i) - x(j)).$

Nous allons maintenant montrer que $|| \ ||_{H^*}$ est préfaiblement UKK, c'est à dire que $|| \ ||_J$ est $\sigma(J, H)$-UKK.

Supposons que $x \in B_J$ et que $||x||_J^2 > 1 - \dfrac{\varepsilon^2}{16}$. Il existe alors $p_1 < ... < p_n$ dans $\mathbb{N}$ tels que : $\sum_{i=1}^{n-1} |x(p_{i+1}) - x(p_i)|^2 > 1 - \dfrac{\varepsilon^2}{16}$.

Soit $V = \{y \in B_J :\ \forall\ i, j \in \{0, .., p_n\},\ i \neq j\ |(y(i) - y(j)) - (x(i) - x(j))| < \delta\}$ où $\delta > 0$ est choisi suffisamment petit pour que :

i) $\forall\ y \in V,\ \sum_{i=1}^{n-1} |y(p_{i+1}) - y(p_i)|^2 > 1 - \dfrac{\varepsilon^2}{16}$.

ii) $\forall\ y \in V,\ \forall\ 0 \leq q_1 < ... < q_k \leq p_n,\quad \sum_{i=1}^{k-1} |(y - x)(q_{i+1}) - (y - x)(q_i)|^2 < \gamma$, où $\gamma > 0$ sera précisé plus tard.

V est un $\sigma(J, H)$-voisinage de x dans B_J. Pour une suite arbitraire d'entiers $q_1 < .. < q_l$ nous devons estimer $\sum_{i=1}^{l-1} |(y - x)(q_{i+1}) - (y - x)(q_i)|^2$. On peut supposer qu'il existe $k < l$ tel que $q_k \leq p_n < q_{k+1}$. Alors pour tout $y \in V$:

a) $\sum_{i=1}^{k-1} |(y - x)(q_{i+1}) - (y - x)(q_i)|^2 \ < \ \gamma$

b) $|(y - x)(q_k) - (y - x)(q_{k+1})| \leq 2\gamma + 4|y(p_n) - y(q_{k+1})|^2 + 4|x(p_n) - x(q_{k+1})|^2$.

c) $\sum\limits_{i=k+1}^{l-1} |(y-x)(q_{i+1})-(y-x)(q_i)|^2 \leq 2 \sum\limits_{i=k+1}^{l-1} |y(q_{i+1})-y(q_i)|^2+|x(q_{i+1})-x(q_i)|^2$.

En combinant a) b) et c) avec i) on obtient que si γ est choisi suffisament petit, alors : $\forall y \in V,\ ||y-x|| < \varepsilon/2$; d'où diam$(V \cap B_J) \leq \varepsilon$. Ce qui prouve que $||\ ||_J$ est $\sigma(J,H)$-UKK.

Pour conclure, nous utiliserons l'existence d'un isomorphisme T de H sur J^*. En effet, S, le shift à droite relativement à la base (e_n^*), est une isométrie de J^* sur $S(J^*)$. D'autre part, $S(H)$ est un sous espace de codimension 1 dans H. Donc H est isomorphe à $H \times \mathbb{R}$ et donc à J^*.

On pose alors, pour tout $x^* \in J^*,\ |x^*| = ||T^{-1}x^*||_H$. $|\ |$ est une norme équivalente sur J^* dont la norme duale est donnée par $|x^{**}|_* = ||T^*x^{**}||_{H^*}$. Comme T^* est $\sigma(J^{**},J^*) - \sigma(H^*,H)$ continu et comme $||\ ||_{H^*}$ est $\sigma(H^*,H)$-UKK, $|\ |_*$ est $\sigma(J^{**},J)$-UKK. $\square$

<u>REFERENCES</u>

[D-G-Z] R. Deville, G. Godefroy et V. Zizler, Smoothness and renormings in Banach spaces, *Longman Scientific and Technical* (1992).

[E] P. Enflo, Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm, *Israel Journal of Math.,* 13 (1972), 281-288.

[E-L] I. Ekeland et G. Lebourg, Generic Fréchet differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 224 (1976), 193-216.

[H] R. Huff, Banach spaces which are nearly uniformly convex, *Rocky Mountain Journal of Math.,* Volume 10, Number 4, Fall. 1980, 743-749.

[J1] R.C. James, Some self-dual properties of normed linear spaces, *Symposium on infinite dimensional topology, Annals of Math. Studies,* 69 (1972), 159-175.

[J2] R.C. James, A somewhat reflexive Banach space with non separable dual, *Bull. A.M.S.* 80 (1974), 738-743.

[L] G. Lancien, Théorie de l'indice et problèmes de renormage en géométrie des espaces de Banach, *Thèse de doctorat de l'Université Paris 6,* Janvier 1992.

[Pi] G. Pisier, Martingales with values in uniformly convex spaces, *Israel Journal of Math.,* 20-3.4 (1975), 326-350.

[**Pr**] S. Prus, Nearly uniformly smooth Banach Spaces, *Bolletino U.M.J.*, (7) 3-B (1989), 507-521.