INDICES DE SZKENK ET ESPACES DE JAMES

Gilles LANCIEN

I. INTRODUCTION.

Nous allons tout d'abord rappeler la définition de l'indice de Szlenk :

Soit X un espace de Banach séparable, notons K la boule unité de X^* munie de la topologie préfaible, K est un compact métrisable.

Pour tout fermé F de K et tout $\varepsilon > 0$, on définit $F'_\varepsilon = \{y \in F$ tq $\exists\ \{y_n\}_{n=1}^\infty \subseteq F$ et $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq B_X$ vérifiant $y_n \xrightarrow{\omega^*} y, x_n \xrightarrow{\omega} 0$ et $\forall\ n, y_n(x_n) \geq \varepsilon\}$.

Ce qui permet de construire la suite transfinie (K_ε^α) de la manière suivante : $K_\varepsilon^o = K, K_\varepsilon^{\alpha+1} = (K_{\varepsilon^\alpha})'_\varepsilon$ et si α est un ordinal limite $K_\varepsilon^\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} K_\varepsilon^\beta$.

On pose

$$\begin{aligned} Sz(\varepsilon, X) &= \inf\{\alpha < \omega_1 \text{ tq } K_\varepsilon^\alpha = \emptyset\}, \text{s'il existe un tel } \alpha \\ &= \omega_1 \text{ sinon} \end{aligned}$$

où ω_1 désigne le premier ordinal non dénombrable. Et finalement $Sz(X) = \sup\limits_{\varepsilon>0} Sz(\varepsilon, X)$.

Cet indice a été introduit par W. Szlenk [7], pour démontrer le résultat suivant : :

THEOREME 1.1. *(Szlenk). Il n'existe pas d'espace réflexif séparable universel pour la classe des espaces réflexifs séparables. (L'espace de Banach X est dit universel pour la classe d'espaces $\mathcal{S}$, si tout élément de $\mathcal{S}$ est isomorphe à un sous-espace de X).*

Principales étapes de la démonstration de Szlenk.

1) Si X^* est séparable, alors $Sz(X) < \omega_1$.

On peut remarquer que la réciproque est fausse. En effet, $Sz(\ell_1) = 1$ (car c'est un espace de Schur).

2) Si $X \hookrightarrow Y$, alors $Sz(X) \leq Sz(Y)$

3) Soit $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ la famille d'espaces réflexifs séparables définie de la façon suivante : $X_0 = \ell_2, X_{\alpha+1} = X_\alpha \oplus_1 \ell_2$. Si α est un ordinal limite $X_\alpha = \ell_2((X_\beta)_{\beta<\alpha})$.

On a : $\forall\ \alpha < \omega_1, Sz(X_\alpha) \geq \alpha$.

Par suite, si $X_\alpha \hookrightarrow X$ pour tout $\alpha < \omega_1$, alors $Sz(X) = \omega_1$ donc X^* n'est pas séparable. $\diamondsuit$

Le but de cet exposé est d'apporter une amélioration de ce résultat en montrant que la classe des espaces réflexifs séparables vérifiant $Sz(X) \leq \omega$ (où ω désigne le premier ordinal infini) n'admet pas non plus d'universel réflexif séparable.

Auparavant, nous allons introduire un nouvel indice, légèrement différent de celui défini par Szlenk, mais un peu plus maniable.

Indice σ. Pour tout fermé F de K et pour tout $\varepsilon > 0$ on pose $F_\varepsilon^{[1]} = \{y \in F \text{ tq } \exists\ (y_n) \subseteq F, y_n \xrightarrow{\omega^*} y \text{ et } \forall\ n\ \|y_n - y\| \geq \varepsilon\}$.

A partir de cette dérivation, on définit comme précedemment les ensembles $K_\varepsilon^{[\alpha]}$ et les indices $\sigma(\varepsilon, X)$ et $\sigma(X)$. L'indice σ est en fait l'indice d'oscillation de $Id : (B_{X^*}, \omega^*) \to (B_{X^*,\|\ \|})$.

Et le théorème de Baire permet d'établir la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2. *Soit X Banach séparable*

$$\begin{aligned} X^* \text{ séparable } &\Leftrightarrow Id : (B_{X^*}, \omega^*) \to (B_{X^*}, \|\ \|) \text{ est de première classe} \\ &\Leftrightarrow \sigma(X) < \omega_1 \end{aligned}$$

Les indices Sz et σ sont donc différents en général. Par exemple : $Sz(\ell_1) = 1$ alors que $\sigma(\ell_1) = \omega_1$. Mais il se trouve que ℓ_1 est presque le seul contre-exemple.

PROPOSITION 1.3. *Soit X un Banach séparable.*

Si $\ell_1 \not\hookrightarrow X$, alors $Sz(X) = \sigma(X)$.

Démonstration. L'inégalité $Sz(X) \leq \sigma(X)$ est évidente. Pour prouver l'inégalité inverse, nous allons montrer par récurrence transfinie que $\forall\ \alpha < \omega_1, \forall\ \varepsilon > 0, K_\varepsilon^{[\alpha]} \subseteq K^\alpha_{\varepsilon/16}$:

•$\forall\ \varepsilon > 0 \quad K_\varepsilon^{[0]} = K^0_{\varepsilon/16} = K$

• le passage aux ordinaux limites s'effectue aisément.

• supposons maintenant que $K_\varepsilon^{[\alpha]} \subseteq K^\alpha_{\varepsilon/16}$.

Montrons qu'alors $K_\varepsilon^{[\alpha+1]} \subseteq K^{\alpha+1}_{\varepsilon/16}$:

Soit

$y \in K_\varepsilon^{[\alpha+1]}, \exists\ \{y_n\}_{n=1}^\infty \subseteq K_\varepsilon^{[\alpha]} \subseteq K^\alpha_{\varepsilon/16}$ tq.

$y_n \xrightarrow{\omega^*} y$ et $\|y_n - y\| \geq \varepsilon, \forall\ n$.

Claim. $\exists\ n_0$ tq $\forall\ n \geq n_0\ \|y_n / \ker y\| > \varepsilon/4$.

Fin de la Démonstration. On peut donc supposer que $\forall\ n, \exists\ x_n \in (B_X \cap \ker y)$ tq $y_n(x_n) \geq \varepsilon/4$.

$\ell_1 \not\hookrightarrow X$, on peut donc supposer, quitte à extraire que $\{x_n\}$ est une suite faiblement de Cauchy. D'autre part, $y_n \xrightarrow{\omega^*} y$ donc $\forall\ p, y_n(x_p) \to 0$ donc on peut construire $\{n_k\}_{k=0}^\infty \subseteq \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall\ k, \left|y_{n_{k+1}}(x_{n_k})\right| \leq \frac{\varepsilon}{8}$.

On pose $x'_{n_k} = \frac{x_{n_k} - x_{n_{k-1}}}{2}$

$\{x'_{n_k}\} \subseteq B_X, x'_{n_k} \xrightarrow{\omega} 0$ car $\{x_n\}$ est faiblement de Cauchy et $y_{n_k}(x_{n_k}) \geq \frac{\varepsilon}{16}$ donc $y \in K^\alpha_{\varepsilon/16}$.$\diamondsuit$

Preuve du claim. On peut supposer $y \neq 0$.

$\|y_n / \ker y\| = d(y_n, \mathbb{R}y)$

Supposons $d(y_n, \mathbb{R}y) \leq \varepsilon/4$

et soit $y'_n \in \mathbb{R}y$ tq $\|y_n - y'_n\| \leq \varepsilon/4$

on a alors $\|y - y'_n\| \geq \frac{3\varepsilon}{4}$.

Soit $x \in B_X$ tq $(y - y'_n)(x) > \frac{\varepsilon}{2}$

on a alors $(y - y_n)(x) > \frac{\varepsilon}{4}$

ce qui est faux à partir d'un certain rang.$\diamondsuit$

II. EXISTENCE D'ESPACE UNIVERSEL POUR LES CLASSES D'ESPACES REFLEXIFS A INDICE DE SZLENK BORNE.

L'argument principal de la démonstration de Szlenk étant l'existence d'espaces réflexifs séparables d'indice arbitrairement grand, on peut se demander si, étant donné $\alpha < \omega_1$ il existe Y réflexif séparable tel que, pour tout X réflexif vérifiant $\sigma(X) \leq \alpha$, on ait $X \hookrightarrow Y$.

On va voir que la réponse est très largement négative.

Notation. On note $\mathcal{S}_\omega$ la classe des espaces réflexifs X vérifiant $\sigma(X) \leq \omega$.

THEOREME 2.1. *Soit Y Banach séparable tel que $\forall\ X \in \mathcal{S}_\omega, X \hookrightarrow Y$.*

Alors Y n'a pas la propriété de Radon-Nikodym.

Ce résultat découle du fait suivant :

PROPOSITION 2.2. $\exists\ (X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ *famille d'espaces réflexifs séparables tels que $\sigma(X_\alpha) \geq \alpha$ et $\sigma(X_\alpha^*) \leq \omega$.*

Démonstration du théorème. Soit Y Banach séparable tq $\forall\ X \in \mathcal{S}_\omega \quad X \hookrightarrow Y$.

Alors $\forall\ \alpha < \omega_1 \quad X_\alpha^* \hookrightarrow X$.

Comme X_α^* est réflexif, l'épluchage de $B_{X_\alpha^*}$ en ouverts préfaibles de diamètre $\leq \varepsilon$ (épluchage associé à $\sigma(\varepsilon, X_\alpha)$) coïncide avec l'épluchage de $B_{X_\alpha^*}$ en ouverts faibles de diamètre $\leq \varepsilon$ qui est plus rapide que l'épluchage en tranches faibles de $B_{X_\alpha^*}$ qui lui-même est plus rapide que l'épluchage en tranches faibles de B_Y. Comme $\forall\ \alpha < \omega_1\ \sigma(X_\alpha) \geq \alpha$, l'indice d'épluchage en tranches faibles de B_Y est $\geq \omega_1$.

Donc Y ne possède pas la propriété de Radon-Nikodym. $\diamondsuit$

Démonstration de la proposition.

Espaces de James.

La famille $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ sera construite à l'aide d'espaces "de James" supportés par des arbres. Pour cela nous nous référons aux articles de R.C. James [3] et de Brakebush [2].

Soit T un arbre sur ω

$J(T) = \{x : T \to \mathbb{R}$ tq $\sup\{(\sum_{j=1}^{n}(\sum_{t\in\mathcal{S}_j} x(t))^2)^{1/2} : n \in \mathbb{N}; \mathcal{S}_1, ..., \mathcal{S}_n$ segments 2 à 2 disjoints de $T\} < \infty\}$
cette quantité étant $\|x\|_{J(T)}$.

Soient $x \in J(T)$ et $s \in T$, on pose $e_s^*(x) = x(s) : e_s^* \in J(T)^*$.

THEOREME 2.3. *(Brakebusch-James).*

1) $J(T)$ est isométrique à $B(T)^*$, où $B(T) = \overline{span}\{e_s^*, s \in T\}$

2) $J(T)$ réflexif $\Leftrightarrow$ T est bien fondé.

Conséquences :

$\forall$ T arbre sur $\omega, B(T) \hookrightarrow B(\omega^{<\omega})$ où $\omega^{<\omega}$ l'ensemble des suites finies sur ω. D'où $\forall$ T bien fondé : $\sigma(J(T)^*) \leq \sigma(B(\omega^{<\omega})) = \alpha$. Or $J(\omega^{<\omega})$ séparable, d'où $\alpha < \omega_1$.

En fait il est possible de montrer directement que $\forall$ T arbre sur $\omega, \sigma(\varepsilon, B(T)) = 0(\frac{1}{\varepsilon^2})$ d'où $\sigma(B(T)) \leq \omega$. Mais on verra plus tard un autre argument.

Admettons donc qu'il nous reste à construire une famille $(T_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ d'arbres bien fondés sur ω tels que $\sigma(J(T_\alpha)) \to \omega_1$.

En fait on va les construire tels que $\sigma(1, J(T_\alpha)) \geq \alpha$:

On pose

$$T_0 = \{\emptyset\}$$

$$T_{\alpha+1} = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n\}^\frown T_\alpha$$

si α est un ordinal limite, on fixe $\alpha_n \nearrow \alpha$

$$T_\alpha = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} \{n\}^\frown T_{\alpha_n}$$

Soit T bien fondé, on note

$$S(T) = \{y \in J(T)^* \text{tq} \ \exists \ s \in T : y = \sum_{t \leq s} e_t^*\}, S(T) \subseteq B_{J(T)^*}.$$

La dérivation de Szlenk sur $S(T)$, pour $\varepsilon = 1$ agit comme la dérivation de Cantor, c'est-à-dire qu'à chaque étape, on retire les points préfaiblement isolés. Il est donc facile d'observer que $\forall \ \alpha < \omega_1 : e_\emptyset^* \in (S(T_\alpha))_1^\alpha$ d'où $\sigma(1, J(T_\alpha)) \geq \alpha . \diamondsuit$.

Améliorations envisageables.

J. Bourgain [1] a notablement amélioré le résultat de Szlenk, de la façon suivante :

THEOREME 2.4. *(Bourgain). Soit Y Banach séparable tel que pour tout X réflexif séparable, $X \hookrightarrow Y$. Alors $C(\Delta) \hookrightarrow X$.*

Le principe de la démonstration est analogue : on définit un indice C_X vérifiant :

$$C(\Delta) \hookrightarrow X \Leftrightarrow C_X = \omega_1$$

et on construit une famille $(R_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ de réflexifs séparables tels que $C_{R_\alpha} \geq \alpha$.

Question 1. Un universel pour la classe $\mathcal{S}_\omega$, contient-il nécessairement un isomorphe de $C(\Delta)$?

Remarque. La famille $(R_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ considérée par J. Bourgain ne résoudra pas ce problème, puisque $\sigma(R_\alpha) \nearrow \omega_1$.

Question 2. Existe-t-il un espace d'Asplund, universel pour la classe $\mathcal{S}_\omega$?

Une autre voie d'investigations consisterait à réduire la classe d'espaces considérée. Par exemple :

Question 3. Existe-t-il un espace réflexif séparable universel pour les espaces X tels que $X \in \mathcal{S}_\omega$ et $X^* \in \mathcal{S}_\omega$.

III. QUASI-UNIFORME CONVEXITE ET INDICE DE SZLENK.

Cette notion a été introduite par R.E. Huff [4].

Définition. Un espace de Banach X est dit quasi-uniformément convexe (QUC) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si (x_n) est une suite dans B_X vérifiant $\inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\} \geq \varepsilon$. Alors $\operatorname{conv}\{x_n\} \cap (1-\delta)B_X \neq \emptyset$.

Remarque. Si X QUC alors X est réflexif (*cf.* [4]).

LEMME 3.1. *Si X est QUC, alors $\sigma(X^*) \leq \omega$.*

La démonstration de ce lemme se trouve dans l'article de Huff [4], mais avec un indice $\eta(X)$, qui s'avère être $\sigma(X^*)$ dans le cas où X est réflexif.

Nous la reproduisons ici :

Soient $K = (B_{X^{**}}, \omega^*) = (B_X, \omega)$ et $\varepsilon > 0$:

Si $x_n \xrightarrow{\omega} x$ et $\|x_n - x\| \geq \varepsilon$ pour tout n, quitte a extraire on peut supposer que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \forall\, n \neq m$. Donc $\forall\, n_0 \operatorname{conv}\{x_n\}_{n \geq n_0} \cap (1-\delta)B_X \neq \emptyset$, où $\delta = \delta(\varepsilon/2)$. Par suite $x \in (1-\delta)B_X$. On a montré que $K_\varepsilon^{[1]} \subseteq (1-\delta)B_X$.

Une récurrence aisée montre que $K_\varepsilon^{[n]} \subseteq (1-\delta)^n B_X$. Par suite $\exists\, n_0 \in \omega$ tq diam $K_\varepsilon^{n_0} < \varepsilon$, d'où $K_\varepsilon^{n_0+1} = \emptyset$.

Donc $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \sigma(\varepsilon, X^*) < \omega$. Par conséquent $\sigma(X^*) \leq \omega$.$\diamondsuit$

Grâce à cette notion nous allons voir que la famille $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ construite par Szlenk vérifie elle aussi : $\forall\, \alpha < \omega_1 \;\; \sigma(X_\alpha^*) \leq \omega$. En effet :

PROPOSITION 3.2. *$\forall\, \alpha < \omega_1, X_\alpha$ est QUC.*

Démonstration. La preuve comprend deux étapes.

1) $\forall\, \alpha < \omega_1, X_\alpha$ admet une base $(e_n^{(\alpha)})_{n=1}^\infty$ telle que

$$\left.\begin{array}{c} \forall\, n \geq 1, \forall\, x \in \mathit{span}\,[e_1^\alpha, ..., e_n^\alpha], \forall\, x' \in \overline{\mathit{span}}\,[e_{n+1}^\alpha, ...] \\ \|x + x'\|^2 \geq \|x\|^2 + \|x'\|^2 \end{array}\right\} (*)$$

2) Un espace réflexif ayant une base $(e_n)_{n=1}^\infty$ vérifiant (*) est nécessairement QUC.

• La preuve de 1) est une récurrence transfinie aisée.

• Montrons 2).

Soit $(x'_n) \subseteq B_X$ tq $\forall n \neq m \, \|x'_n - x'_m\| \geq \varepsilon$.

Comme X est réflexif, on peut supposer que $x'_n \xrightarrow{\omega} x$ on écrit $x'_n = x_n + x_0$ où $x_n \xrightarrow{\omega} 0$. Quitte à extraire on peut supposer $\|x_n\| \geq \varepsilon/2$.

Par un argument standard, on peut aussi supposer que les x_n sont à supports finis disjoints et croissants dans la base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. (*i.e.* le dernier membre du support de x_n est inférieur au premier membre du support de x_{n+1}). Soit $\eta > 0$: $\exists\ k$ tq $\left\|\sum_{i=1}^{k} x^{(i)} e_i\right\| > \|x\|^2 - \eta^2$ (où $x = \sum_{i=1}^{\infty} x^{(i)} e_i$). Comme les x_n sont à supports finis croissants et d'après 1) :

$$\exists\ n_0 \text{ tq } \forall\ n \geq n_0, \left\|\sum_{i=1}^{k} x^{(i)} e_i\right\|^2 + \left\|\sum_{i=k+1}^{\infty} (x^{(i)} + x_n^{(i)}) e_i\right\|^2 \leq \|x_0 + x_n\|^2 \leq 1$$

d'où

$$\forall\ \eta > 0, \|x_0\|^2 - \eta^2 + (\varepsilon/2 - \eta)^2 \leq 1$$

Par suite $\|x_0\|^2 \leq 1 - \varepsilon^2/4.\diamondsuit$

Les mêmes techniques permettent de préciser la nature des espaces $J(T)$.

PROPOSITION 3.3. *Si T est un arbre bien fondé sur ω. Alors $J(T)$ est QUC.*

Démonstration. Nous allons seulement indiquer comment obtenir un analogue du point 1) de la Proposition 3.2.

Base de $J(T)$. Pour $s \in T$ on note

$$e_s : T \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \delta_{s,t}$$

$e_s \in J(T)$

Soit $\{B_n\}$ une énumération des branches de T. Ensuite on énumère à tour de rôle $\mathcal{B}_1, B_2 \setminus B_1, ..., B_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, en respectant l'ordre partiel naturel sur T, ce qui nous fournit une énumération de T : $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Posons $e_n = e_{s_n}$, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ est une base monotone de $J(T)$.

Soient s_{n_1} le dernier terme de $B_1, ..., s_{n_k}$ le dernier terme de $B_k \setminus \bigcup\limits_{1}^{k=1} B_i$; on vérifie aisément que

1') $\forall\ k \geq 1, \forall\ x \in$ span $[e_1, ..., e_{n_k}], \forall\ x' \in \overline{\text{span}}[e_i]_{i>n_k}$

$\|x + x'\|^2 \geq \|x\|^2 + \|x'\|^2$.

Il est maintenant facile d'adapter la preuve du point 2) de la proposition 3.2. $\diamondsuit$

Remarque. Il existe toutefois une différence entre les familles $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ et $(J(T_\alpha))_{\alpha<\omega_1}$.

En effet si $\forall\ \alpha < \omega_1 \ \ X_\alpha \hookrightarrow X$ alors $\ell_1 \hookrightarrow X$ alors que $\forall\ \alpha < \omega_1 \ \ J(T_\alpha) \hookrightarrow J(\omega^{<\omega})$ et $\ell_1 \not\hookrightarrow J(\omega^{<\omega})$.

S. Prus [5] a donné des caractérisations en termes d'inégalités de type ℓ_p de l'existence de norme équivalentes QUC sur les espaces à base. Il a également démontré [6] l'existence d'un espace réflexif à base universel pour les espaces à base ayant une norme QUC et une norme duale QUC.

Question 4. Ceci nous rapproche beaucoup de la classe considérée en question 3 ($X \in \mathcal{S}_\omega$ et $X^*\mathcal{S}_\omega$), mais on ne sait toujours pas si $X \in \mathcal{S}_\omega$ est équivalent à l'existence d'une norme équivalente QUC sur X^* (cette question est due à Huff [4]).

REFERENCES

[**1**] Bourgain J., On separable Banach spaces, universal for all separable reflexive spaces, *Proc. A.M.S.* 79 (1980), n^{o} 2, 241-246.

[**2**] Brackebusch R.E., James Space on general Trees , *Journal of Functional Analysis,* 79 (1988), 446-448.

[**3**] James R.C., A somewhat reflexive Banach space with non separable dual, *Bull. A.M.S.* 80 (1974), 738-743.

[**4**] Huff R., Banach spaces which are nearly uniformly convex, *Rocky Mountain J. Math.,* Volume 10, Number 4, Fall. 1980, 743-749.

[**5**] Prus S., Nearly uniformly smooth Banach Spaces, *Bolletino U.M.J.,* (7) 3-B (1989), 507-521.

[**6**] Prus S., Finite dimensional decompositions of Banach spaces with (p,q) estimates, *Dissertationes Math.,* 263 (1987).

[**7**] Szlenk W., The non existence of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces, *Studia Math.* 30 (1969), 53-61.

EQUIPE D'ANALYSE
Université Paris VI
Boîte 186
4, place Jussieu
75252 - PARIS CEDEX 05