Journée des jeunes chercheurs
Sous-espaces lipschitziens de $\mathcal{C}(K)$

Alexis ROUSSEL

31 mars 2017

Introduction

Définition

Soit A et B deux espaces vectoriels normés. Un plongement de A dans B est une isométrie linéaire de A dans B.

Exemple : Si K est un espace métrique compact, on peut plonger tout espace de Banach séparable dans $\mathcal{C}(K)$. C'est le théorème de Banach-Mazur. On dit que $\mathcal{C}(K)$ est universel pour la classe des espaces de Banach séparables.

Question : A quelle(s) conditions(s) l'image du plongement est-elle incluse dans l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur K ?

Théorème de Banach-Mazur

Espace de Cantor

Définition

On pose $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *l'espace de Cantor muni de la topologie produit. Si on note*
$C_1 = [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1]$, $C_2 = [0; \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}; \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}; \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}; 1]$.... *On pose* $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ *compact de* $[0; 1]$ *et on l'appelle ensemble triadique de Cantor.*

Théorème de Banach-Mazur

Espace de Cantor

Proposition

Si on pose $V_{s,n} = \{t \in \Delta \ / t \restriction n = s \restriction n\}$ *alors la famille* $(V_{s,n})_{\substack{s\in\Delta \\ n\in\mathbb{N}}}$ *forme une base de voisinages de* Δ *qui est même métrisable par* $d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^{n+1}}$.

Proposition

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \Delta & \longrightarrow & C \\ & (\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\varepsilon_n}{3^{n+1}} \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Théorème de Banach-Mazur

Surjection continue du Cantor

Théorème

Tout espace compact métrisable est l'image continue de l'espace de Cantor.

Démonstration.

On construit une collection $(K_i)_{i \in T}$ d'ensembles fermés de K indexé par $T = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{0,1\}^n$ vérifiant que pour chaque $s \in \Delta$, $\mathrm{diam}(K_{s \restriction n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $K_s = K_{s^\frown 0} \cup K_{s^\frown 1}$ pour tout $s \in T$. La complétude permet de définir $s \in \Delta \mapsto \phi(s) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{s \restriction n}$, surjection continue. $\square$

Théorème de Banach-Mazur

Surjection continue du Cantor

Autre preuve :

Démonstration.

Il existe une rétraction continue r de Δ dans tout fermé F de Δ. En effet,

$$\forall x \in \Delta \ \exists ! y \in F d(x, y) = d(x, F)$$

On pose $r(x) = y$ et on montre que

$$\mathrm{Gr(r)} := \{(x, y) \in \Delta^2 \ / r(x) = y\}$$

est fermé donc que r est continue. □

Théorème de Banach-Mazur
Surjection continue du Cantor

Démonstration.

Les applications

$$\begin{array}{rccc} s: & \Delta & \longrightarrow & [0,1] \\ & (\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^{n+1}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \tilde{s}: & \Delta^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & [0,1]^{\mathbb{N}} \\ & (\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty} & \longmapsto & (s(\varepsilon^n))_n \end{array}$$

sont des surjections continues. $\square$

Théorème de Banach-Mazur

Surjection continue du Cantor

Démonstration.

Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est une bijection, alors

$$\psi : \begin{array}{ccc} \Delta^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \Delta \\ (\varepsilon_n)_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} & \longmapsto & (\varepsilon_{\varphi(n)})_n \end{array}$$

est un homéomorphisme. Ainsi $\Delta \overset{\psi^{-1}}{\twoheadrightarrow} \Delta^{\mathbb{N}} \overset{\tilde{s}}{\twoheadrightarrow} [0,1]^{\mathbb{N}}$ et $S := \tilde{s} \circ \psi^{-1}$ est une surjection continue de Δ sur $[0,1]^{\mathbb{N}}$ $\square$

Théorème de Banach-Mazur

Surjection continue du Cantor

Démonstration.

Comme K est compact métrisable, K est homéomorphe à un fermé G de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ via un homéomorphisme h. On pose $F = S^{-1}(G)$, fermé de Δ. Finalement

$$\Delta \overset{p}{\twoheadrightarrow} F \overset{S}{\twoheadrightarrow} G \overset{h}{\cong} K$$

et $h \circ S \circ p : \Delta \to K$ est bien une surjection continue $\square$

Théorème de Banach-Mazur

Fin de la preuve

Démonstration.

$X \hookrightarrow \mathcal{C}(B_{X^*})$ via

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & \mathcal{C}(B_{X^*}) & & & & \\ x & \longmapsto & \delta_x & : & B_{X^*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

□

Théorème de Banach-Mazur

Fin de la preuve

Démonstration.

$\mathcal{C}(B_{X^*}) \hookrightarrow \mathcal{C}(\Delta)$ via

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathcal{C}(B_{X^*}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\Delta) \\ & g & \longmapsto & g \circ \phi \end{array}$$

où ϕ désigne la surjection continue de Δ dans B_{X^*}. □

Théorème de Banach-Mazur
Fin de la preuve

Démonstration.

Δ et C sont homéomorphes via $\varphi : \Delta \to C$ donc l'application

$$\begin{array}{rccc} U : & \mathcal{C}(C) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\Delta) \\ & f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array}$$

est une isométrie linéaire surjective. $\square$

Théorème de Banach-Mazur

Fin de la preuve

Démonstration.

$\mathcal{C}(C) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,1])$ par des raccords affines.
On a finalement la chaîne de plongements :

$$X \hookrightarrow \mathcal{C}(B_{X^*}) \hookrightarrow \mathcal{C}(\Delta) \cong \mathcal{C}(C) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,1])$$

. □

Théorème de Banach-Mazur

Fin de la preuve

Démonstration.

Lemme

Soit K un espace métrique compact non dénombrable. Alors il existe un sous-ensemble $E \subset K$ tel que Δ est homéomorphe à E.

Théorème (de Borsuk)

Soit K un espace métrique compact et soit E un sous-espace fermé de K. Alors il existe un opérateur linéaire $T : \mathcal{C}(E) \to \mathcal{C}(K)$ tel que $(Tf)|_E = f$, $||T|| = 1$ et $T1 = 1$. En particulier, $\mathcal{C}(E) \hookrightarrow \mathcal{C}(K)$.

$\square$

Théorème de Banach-Mazur

Fin de la preuve

Démonstration.

On a finalement

$$X \hookrightarrow \mathcal{C}(B_{X^*}) \hookrightarrow \mathcal{C}(\Delta) \cong \mathcal{C}(E) \hookrightarrow \mathcal{C}(K)$$

□

On a même

Corollaire

Les espaces $\mathcal{C}([0,1])$ et $\mathcal{C}(\Delta)$ sont universels pour les espaces métriques séparables.

Théorème de Banach-Mazur

Fin de la preuve

Démonstration.

Soit (M, d) un espace métrique et $x_0 \in M$. Posons ψ l'application

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & (\mathcal{C}_b(M, \mathbb{R}), ||.||_\infty) \\ x & \longmapsto & \psi(x) \quad : \quad \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & d(z,x) - d(z,x_0) \end{array} \end{array}$$

Alors $||\psi(x)||_\infty \leq d(x, x_0)$ et ψ est une isométrie. Comme (M, d) est séparable, on a $\psi(M)$ séparable donc $X = \overline{\text{vect}}(\psi(M))$ aussi Finalement, X est isométrique à un sous-espace de $\mathcal{C}(\Delta)$ et ainsi M $\square$

Résultats auxiliaires

Définition

Soit (K, d) un espace métrique compact. On note $L(K, d) \subset \mathcal{C}(K)$ l'ensemble des applications lipschitziennes sur K. Pour $f \in L(K, d)$, on note $L(f) := \sup \left\{ \frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{d(t_1, t_2)} / \ t_1, t_2 \in K, \ \ t_1 \neq t_2 \right\}$ la constante de Lipschitz de f sur K.

Proposition

Soit $X \subset \mathcal{C}(K)$ un sous-espace vectoriel non trivial. Alors
(a) soit $X \cap L(K, d)$ est maigre dans X
(b) soit $X \subset L(K, d)$, X est de dimension finie et il existe $\lambda > 0$ tel que $L(f) \leq \lambda ||f||$ pour tout $f \in X$.

Pour la preuve, utiliser les téorèmes de Baire, d'Ascoli et de Riesz

Résultats auxiliaires

Proposition

Soit $J : X \to \mathcal{C}(K)$ un opérateur linéaire borné. Alors $J(X) \subset L(K, d)$ si et seulement si $J^*|_K$ est lipschitzien pour d et la norme de X^*.

Proposition

Soit X un espace de Banach et soit $J : X \to \mathcal{C}(K)$ un opérateur linéaire de norme $||J|| \leq 1$. Alors J est une isométrie si et seulement si

$$Ext(B_{X^*}) \subset J^*(K) \cup (-J^*(K))$$

Résultats auxiliaires

Lemme

L'application $J : X \to Y$ *est une isométrie linéaire si et seulement si* $J^*(B_Y^*) = B_{X^*}$

Lemme

On a $Ext(B_{C(K)^*}) = \{\pm\delta_k / k \in K\} = K \cup (-K)$

Résultats auxiliaires

Corollaire

Soit X un espace de Banach. Alors il existe une isométrie linéaire de X dans $\mathcal{C}(K)$ si et seulement si il existe une application continue $\psi : K \to B_{X^*}$ telle que

$$Ext(B_{X^*}) \subset \psi(K) \cup (-\psi(K))$$

Corollaire

Soit X un espace de Banach tel que X^* est strictement convexe et soit $J : X \to \mathcal{C}(K)$ une isométrie linéaire. Alors

$$S_{X^*} \subset J^*(K) \cup (-J^*(K)).$$

De plus il existe $t_1, t_2 \in K$ tel que $J(x)(t_1) = -J(x)(t_2)$ pour tout $x \in X$.

Principaux résultats

Définition

Soit X un espace métrique et $r, s \geq 0$. La quantité

$$H_r^s(X) = \inf_{\operatorname{diam}(A_i) < r} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(A_i)^s \;\middle|\; X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

est une fonction décroissante en r. On peut donc définir la mesure de Hausdorff de X par $H^s(X) = \lim_{r \to 0} H_r^s(X)$. On vérifie que si $H^s(X)$ est fini alors, pour tout $t > s$, $H^t(X) = 0$ et que si $H^s(X) > 0$ alors, pour tout $t < s$, $H^t(X)$ est infini. Ce point "critique" s'appelle la dimension de Hausdorff de X et est défini par $\dim_H(X) = \inf\{s > 0 \mid H^s(X) = 0\} = \sup\{s > 0 \mid H^s(X) = \infty\}$.

Principaux résultats

Définition

Un espace métrique séparable est une variété lipschitzienne de dimension n *si chaque point de cet espace possède un voisinage fermé bilipschitz-homéomorphe à* $[-1,1]^n$ *c'est-à-dire que cet homéomorphisme est bilipschitzien.*

Lemme

Soit K *une variété lipschitzienne de dimension* k*. Alors* $k \geq n$ *si et seulement si il existe une application lipschitzienne surjective* $\psi : K \to [-1,1]^n$*.*

Principaux résultats

Lemme

Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ une partie non vide quelconque de X. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne sur A dont on note $L(f)$ la constante de Lipschitz. Alors

$$\tilde{f}(x) = \inf_{y \in A} \{f(y) + Lip(f)d(x, y)\}.$$

prolonge f de manière lipschitzienne sur X tout entier et $L(f) = L(\tilde{f})$

Principaux résultats

Lemme

Soit X un espace vectoriel de dimension $n+1$. Alors
1. Deux sphères pour des normes différentes sur X sont homéomorphes de façon bi-lipschitzienne.
2. La sphère unité, pour toute norme sur X, est une variété lipschitzienne de dimension n.

Principaux résultats

Théorème

Soit (K,d) *un espace métrique compact non dénombrable et* $n \in \mathbb{N}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) Il existe une application lipschitzienne surjective $\phi : K \to [-1,1]^n$
(ii) $\mathcal{C}(K)$ *contient un sous-espace isométrique à n'importe quel espace de Banach de dimension* $n+1$ *formé de fonctions lipschitziennes.*
(iii) $\mathcal{C}(K)$ *contient un sous-espace isométrique à* $(\mathbb{R}^{n+1}, ||.||_2)$ *formé de fonctions lipschitziennes.*

Si de plus K *est une variété lipschitzienne, alors les assertions précèdentes sont équivalentes à*
(iv) La dimension (de Hausdorff) de K *est au moins* n.

Principaux résultats

Théorème

Soit K une variété compacte de classe $\mathcal{C}^r$ de dimension $n-1$ pour $n \geq 2$ et $r = 1\ldots,\infty$. Alors
(a) $\mathcal{C}(K)$ contient un sous-espace isométrique à $(\mathbb{R}^n, ||.||_2)$ formé de fonctions lipschitziennes de classe $\mathcal{C}^r$
(b) $\mathcal{C}(K)$ ne contient aucun sous-espace isométrique à $(\mathbb{R}^{n+1}, ||.||_2)$ formé de fonctions lipschitziennes de classe $\mathcal{C}^1$

Principaux résultats

Définition

Un espace normé X de dimension finie est dit polyhédral si sa boule unité est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

Théorème

Si K est un espace métrique compact infini, alors $\mathcal{C}(K)$ contient des sous-espaces isométriques de tout espace polyhedral de dimension finie formé de fonctions lipschitziennes.

Pour aller plus loin

1) Expliciter et construire des plongements de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{C}(K)$. Par exemple, $J : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{C}([-1,1])$ par

$$J(x_1, x_2)(t) = x_1 \cos(\pi t) + x_2 \sin(\pi t)$$

ou $J : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{C}([-1,1]^2)$ par

$$J(x_1, x_2, x_3)(t) = x_1 \cos(\pi t) \cos(\pi s) + x_2 \sin(\pi t) \cos(\pi s) + x_3 \sin(\pi s)$$

... Possible avec des fonctions "simples" selon la dimension de K

Pour aller plus loin

2)

Définition

Si $\alpha \in]0,1[$, $f : K \to \mathbb{R}$ *est* α*-hölderienne s'il existe* $\lambda > 0$ *telle que pour tout* $x, y \in K$, $|f(x) - f(y)| \leq \lambda d(x,y)^\alpha$

Conditions pour avoir des plongements à image incluse dans les applications höldériennes ? ...

Merci et bonne journée !