Approximation des EDPs, annales de sujets d'examens corrigés

ENSMM, semestre vert du printemps

Enseignant : Nathaël Alibaud[1]

Version de novembre 2017

1. Enseignant du semestre d'automne : Mohamed Rachid Laydi

Table des matières

Chapitre 1

Partiel de 2011-2012

(Tournez la page.)

(Ci-dessous un exercice qui faisait partie d'un partiel commun " Analyse des mesures–Approx des EDPs ", de 2011-2012.)

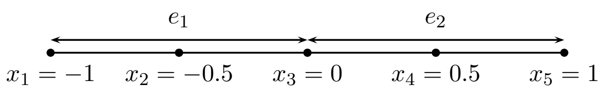
Exercice d'éléments finis (1 h 15). On considère le problème

$$\begin{cases} -(a\,u')'(x) + b(x)\,u'(x) + c(x)\,u(x) = f(x) & \forall x \in \Omega =]-1,1[, \\ u = 0 & \forall x \in \partial\Omega = \{-1,1\}, \end{cases} \tag{1}$$

où $a, b, c, f : \Omega \to \mathbb{R}$ sont données et $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est l'inconnue (avec $\overline{\Omega} = [-1,1]$).

1. On suppose que $a, b, c, f, u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et on considère $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ telle que $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$. Montrez que
$$\phi(u,\varphi) = l(\varphi)$$
où
$$\begin{aligned} \phi(u,\varphi) &= \int_\Omega \left(a\,u'\,\varphi' + b\,u'\,\varphi + c\,u\,\varphi\right), \\ l(\varphi) &= \int_\Omega f\,\varphi. \end{aligned}$$

2. On découpe $\overline{\Omega}$ de la manière suivante :



On muni chaque e d'une structure d'élément fini $(e, \mathcal{P}_e, \Sigma_e)$ de Lagrange de degré 2. On note $\mathcal{B} := (\varphi_i)_{i=1,\dots,5}$ la base de
$$V_h = \left\{ u_h \in C(\overline{\Omega}) : \text{pour } i = 1, 2,\ (u_h)_{|e_i} \in \mathcal{P}_{e_i} \right\}$$
définie par $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \dots, 5)$. Calculez les coordonnées U_h de u_h sur $\mathcal{B}$ en fonction de u_h et des x_i. Vous justifierez les calculs en admettant que $\mathcal{B}$ est bien une base de V_h.

3. On dit que u_h est une solution approchée de (1) si
$$\begin{cases} u_h \in V_h^0 \\ \phi(u_h, \varphi_h) = l(\varphi_h) & \forall \varphi_h \in V_h^0, \end{cases}$$
où $V_h^0 = \{u_h \in V_h : u_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$. Montrez que
$$AU_h = F$$
où pour $i, j = 1, \dots, 5$,
$$A_{ij} = \begin{cases} \phi(\varphi_j, \varphi_i) & \text{si } i \notin I_D, \\ \delta_{ij} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$F_i = \begin{cases} l(\varphi_i) & \text{si } i \notin I_D, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $I_D = \{1, 5\}$.

4. Pour $e = [S_1, S_2]$, on note $A^e \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ et $F^e \in \mathbb{R}^3$ les matrices et second membres élémentaires définis par

$$A^e_{nk} = \int_e \left\{ a\,(\mathcal{N}^e_k)'\,(\mathcal{N}^e_n)' + b\,(\mathcal{N}^e_k)'\,\mathcal{N}^e_n + c\,\mathcal{N}^e_k\,\mathcal{N}^e_n \right\}$$

et

$$F^e_k = \int_e f\,\mathcal{N}^e_k,$$

pour $n, k = 1, \ldots, 3$, où les $\mathcal{N}^e_k$ sont les fonctions d'interpolation locales. Exprimez A_{34}, A_{44} et F_3 en fonction de ces coefficients élémentaires.

5. Calculez une approximation de F_3 par la formule de Simpson en fonction de f et des x_i (et de $h = |e_1| = |e_2|$).
6. Montrez que $(\mathcal{N}^e_2)'(S_1) = -(\mathcal{N}^e_2)'(S_2) = \frac{4}{|e|}$, où $|e| = S_2 - S_1$.
7. En déduire une approximation de A_{44} par la formule de Simpson en fonction de a, b, c et des x_i (et de h).
8. On admet que si $a \equiv f \equiv 1$ et $b \equiv c \equiv 0$, alors pour tout e,

$$A^e = \frac{1}{3\,h} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F^e = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(où $h = |e|$). Ecrivez le code d'une fonction sur matlab qui permet de calculer A^e et F^e en fonction de $S = \begin{pmatrix} S_1 \\ m \\ S_2 \end{pmatrix}$ (où m est le milieu de e). Vous noterez S la variable d'entrée et Ae et Fe les variables de sorties.

Correction partiel

①

$\boxed{1)}$ On multiplie l'équation par φ. On obtient :

$$-(a u')'\varphi + b u'\varphi + c u\varphi = f\varphi \quad \text{sur } \Omega.$$

On intègre sur Ω :

$$\underbrace{-\int_\Omega (a u')'\varphi}_{\substack{\| \text{ noté} \\ I}} + \int_\Omega \left(b u'\varphi + c u \varphi \right) = \int_\Omega f\varphi.$$

On intègre I par partie :

$$I = \int_\Omega a u'\varphi' - \underbrace{\cancel{\left[a u'\varphi\right]_{-1}^{1}}}_{\substack{\| \\ a(1)u'(1)\varphi(1) - a(-1)u'(-1)\varphi(-1) \\ \| \\ 0 \\ \text{car } \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega = \{-1,1\}}}.$$

On en déduit que

$$\int_\Omega \left(a u'\varphi' + b u'\varphi + c u \varphi \right) = \int_\Omega f\varphi.$$

2) Notons $U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_5 \end{pmatrix}$ les coordonnées de u_h sur $\mathcal{B}$, ie pour tout $x \in \bar{\Omega}$,

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{5} u_i \, \varphi_i(x).$$

En $x = x_j$, on obtient

$$u_h(x_j) = \sum_{i=1}^{5} u_i \underbrace{\delta_{ij}}_{\substack{= \\ 0 \text{ si } i \neq j \\ \text{et } 1 \text{ si } i = j}} = u_j$$

On déduit que $\boxed{u_j = u_h(x_j).}$

3) Supposons que

$$\begin{cases} u_h \in V_h^0 & (*) \\ \phi(u_h, \varphi_h) = \ell(\varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h^0 & (**) \end{cases}$$

et montrons que $A U_h = F$, où A et F sont définis dans l'énoncé.

De la question 2) et de $(*)$, on déduit que

$$\boxed{u_1 = u_5 = 0.} \quad (1)$$

Prenons maintenant $\varphi_h = \varphi_i$ dans $(**)$

avec $i \in \{2,3,4\}$, ie $i \notin I_D$.

On obtient

$$\phi(u_h, \varphi_i) = \ell(\varphi_i).$$

fonctions

On rappelle que $u_h = \sum_{j=1}^{5} u_j \varphi_j$. Donc

scalaires

$$\phi\Big(\sum_{j=1}^{5} u_j \varphi_j, \varphi_i\Big) = \ell(\varphi_i).$$

On rappelle aussi que ϕ ~~est~~ bilinéaire (vu en cours).

"on peut sortir la somme et les scalaires"

Donc

$$(2) \quad \boxed{\sum_{j=1}^{5} u_j \, \phi(\varphi_j, \varphi_i) = \ell(\varphi_i) \quad (\forall i \notin I_D).}$$

Il est clair que "(1) et (2)" est équivalent à

$AU_h = F$.

4)

Pour A_{34}

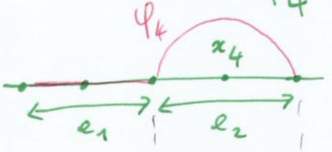
car "$i \notin I_D$"

On a $A_{34} = \int_\Omega \left(a\varphi_4'\varphi_3' + b\varphi_4'\varphi_3 + c\varphi_4\varphi_3 \right)$

$$= \int_{e_1}(\dots) + \int_{e_2}(\dots)$$

$$= \int_{e_2}(\dots)$$

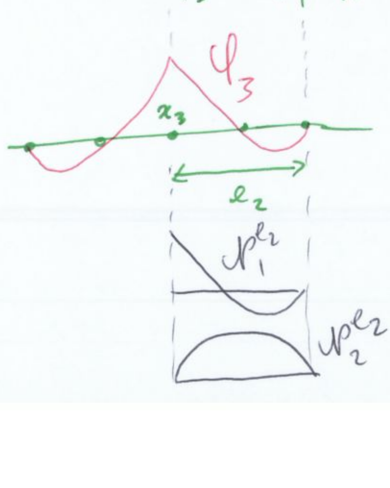
car $\varphi_4 = 0$ sur e_1



$$= \int_{e_2}\Big(a\left(\varphi_2^{e_2}\right)'\left(\varphi_1^{e_2}\right)' + b\left(\varphi_2^{e_2}\right)'\varphi_1^{e_2} + c\,\varphi_2^{e_2}\varphi_1^{e_2} \Big).$$

car $\varphi_4 = \varphi_2^{e_2}$ sur e_2

et $\varphi_3 = \varphi_1^{e_2}$ sur e_2



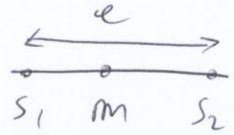
Donc $\boxed{A_{34} = A_{12}^{e_2}}$.

⑤

Remarque

Pour ceux qui ne se rappellent plus des éléments finis de Lagrange de degré 2, on rappelle que les degrés de liberté locaux sur e sont numérotés comme ceci :

- $e = [s_1, s_2]$

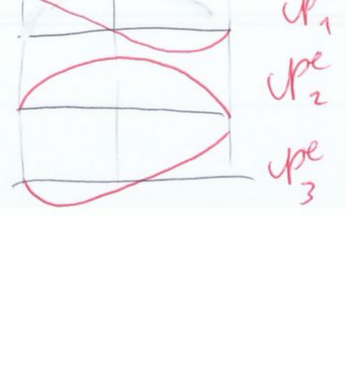


- $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_2 = \text{Vect}\{1, x, x^2\}$

- $\forall p \in \mathcal{P}_e, \quad \begin{cases} \mathcal{L}^e_1(p) = p(s_1) \\ \mathcal{L}^e_2(p) = p(m) \\ \mathcal{L}^e_3(p) = p(s_2), \end{cases}$

et donc la base $\{\varphi^e_1, \dots, \varphi^e_3\}$ de $\mathcal{P}_e$ est définie par :

$$\boxed{\forall k, m \in [\![1,3]\!], \quad \mathcal{L}^e_k(\varphi^e_m) = \delta_{km}.}$$



⑥

Pour A_{44}

On montre de la même manière que

$$\boxed{A_{44} = A_{22}^{e_2}.}$$

Pour F_3

"$i \notin I_D$"

$$F_3 = \int_\Omega f \varphi_3$$

$$= \int_{e_1} f \varphi_3^{e_1} + \int_{e_2} f \varphi_1^{e_2}$$

voir le graphe de φ_3 à la page 4

Donc $\boxed{F_3 = F_3^{e_1} + F_1^{e_2}.}$

(7)

$\boxed{5)}$

car $\varphi_3^{e_1}(x_1)=0$ car $\varphi_3^{e_1}(x_2)=0$

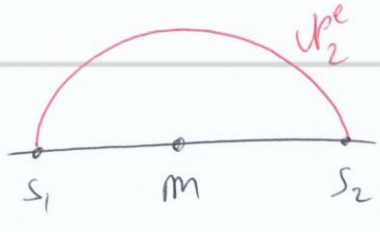
$$F_3^{e_1} \overset{\text{Simpson}}{\simeq} \frac{|e_1|}{6}\Big(f(x_1)\overset{0}{\cancel{\varphi_3^{e_1}(x_1)}} + 4\, f(x_2)\overset{0}{\cancel{\varphi_3^{e_1}(x_2)}} + f(x_3)\underbrace{\varphi_3^{e_1}(x_3)}_{1}\Big)$$

$$\simeq \frac{h}{6} f(x_3).$$

De même $F_1^{e_2} \simeq \frac{h}{6} f(x_3)$.

Donc $\boxed{F_3 \simeq \frac{h}{3} f(x_3).}$

$\boxed{6)}$ On rappelle le graphe de φ_2^e :



Par symétrie, il est clair que $\left(\varphi_2^e\right)'(s_1) = -\left(\varphi_2^e\right)'(s_2)$

(8)

(en effet, $\varphi_2^e(x) = \dfrac{(x-s_1)(x-s_2)}{(m-s_1)(m-s_2)}$

a un graphe symmétrique par rapport à l'axe $\{x = m\}$).

De plus, $(\varphi_2^e)'(x) = \dfrac{(x-s_1) + (x-s_2)}{(m-s_1)(m-s_2)}$

et en $x = s_1$, on a

$$(\varphi_2^e)'(s_1) = \frac{-|e|}{\frac{|e|}{2} \times \left(-\frac{|e|}{2}\right)} = \frac{4}{|e|}.$$

Donc $\boxed{(\varphi_2^e)'(s_1) = \frac{4}{|e|} = -(\varphi_2^e)'(s_2).}$

$\boxed{7)}$

$$A_{44} = A_{22}^{e_2}$$

$$= \int_{e_2} \underbrace{\left(a(\varphi_2^{e_2})'(\varphi_2^{e_2})' + b(\varphi_2^e)'\varphi_2^e + c\varphi_2^e\varphi_2^e\right)}_{\substack{g \\ \text{(Simpson)}}}$$

$$\simeq \frac{|e_2|}{6}\left(g(x_3) + 4g(x_4) + g(x_5)\right).$$

(Simpson)

(9)

Or, il est clair que $\boxed{\left(\varphi_2^{e_2}\right)'(x_4) = 0}$

car x_4 est le milieu de e_2 et on voit sur le graphe de la page 7 que φ_2^e atteint son maximum en ce milieu.

De plus, on rappelle que

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_2^{e_2}(x_3) = 0 \\ \varphi_2^{e_2}(x_4) = 1 \\ \varphi_2^{e_2}(x_5) = 0. \end{cases}}$$

Avec la question 6) et toutes ces remarques, on calcule facilement que

$$A_{44} \simeq \frac{h}{6}\left(\frac{16}{h^2} a(x_3) + \frac{16}{h^2} a(x_5) + 4\, c(x_4) \right)$$

ie $\boxed{A_{44} \simeq \frac{8}{3h}\left(a(x_3) + a(x_5)\right) + \frac{2h}{3}\, c(x_4).}$

8)

(10)

```
function [Ae,Fe] = AeFe(S)

S1 = S(1);
S2 = S(3);
h = S2 - S1;

Fe = [1; 4; 1];
Fe = (h/6) * Fe;
Ae = [7 ␣ -8 ␣ 1 ; -8 ␣ 16 ␣ -8 ; 1 ␣ -8 ␣ 7];
Ae = (1/(3*h)) * Ae;
```

"espace"

Chapitre 2

Examen de 2011-2012

(Tournez la page.)

Tempo : 1h50

légèrement modifié

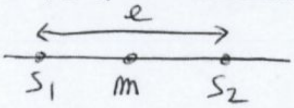
Examen d'éléments finis

Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques

Semestre vert, 2011-2012

N.B. : les pôlycopiés et les notes du cours et des TDs/TPs sont autorisés.

Exercice 1. Soient $e = [S_1, S_2] \subset \mathbb{R}$ et m le milieu comme ci-dessous.

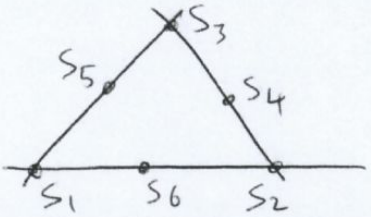


On considère l'espace d'interpolation $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_2 = \text{vect}\{1, x, x^2\}$. Pour tout $p \in \mathcal{P}_e$, on définit les degrés de liberté

$$\mathcal{L}_1^e(p) = p(S_1), \quad \mathcal{L}_2^e(p) = p''(m) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_3^e(p) = p(S_2).$$

1. Montrez que si $\mathcal{L}_1^e(p) = \mathcal{L}_2^e(p) = \mathcal{L}_3^e(p) = 0$, alors p est le pôlynome nul.
2. On note $\mathcal{N}_k^e \in \mathcal{P}_e$ les fonctions d'interpolation ($\mathcal{L}_k^e(\mathcal{N}_n^e) = \delta_{kn}$). Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathcal{N}_2^e(x) = \frac{(x - S_1)(x - S_2)}{2}.$$
3. Montrez que $(\mathcal{N}_1^e)''$ et $(\mathcal{N}_3^e)''$ sont identiquement nuls et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathcal{N}_1^e(x) = \frac{x - S_2}{S_1 - S_2} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_3^e(x) = \frac{x - S_1}{S_2 - S_1}.$$
4. On note $|e| = S_2 - S_1$. Calculez $(\mathcal{N}_2^e)'(x)$ en fonction de $|e|$ pour $x = S_1, m, S_2$.
5. Etant donnée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit la matrice $A^e \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ et le vecteur $F^e \in \mathbb{R}^3$ suivant :
$$A_{kn}^e = \int_e (\mathcal{N}_n^e)' (\mathcal{N}_k^e)' \, dx \quad \text{et} \quad F_k^e = \int_e f \, \mathcal{N}_k^e \, dx.$$
On admet que A^e et F^e sont de la forme
$$A^e = \begin{pmatrix} \frac{1}{|e|} & * & -\frac{1}{|e|} \\ * & * & * \\ -\frac{1}{|e|} & * & \frac{1}{|e|} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F^e = \begin{pmatrix} |e| \left(\frac{f(S_1)}{6} + \frac{f(m)}{3} \right) \\ * \\ * \end{pmatrix}.$$
Calculez des approximations des coefficients manquants par la formule de Simpson, en fonction de $f(m), f(S_2)$ et $|e|$.

Exercice 2. Soient e un triangle de $\mathbb{R}^2$ et $S_1, \dots, S_6$ les sommets et les milieux des arêtes comme ci-dessous.



$S_k = (x_k, y_k)$

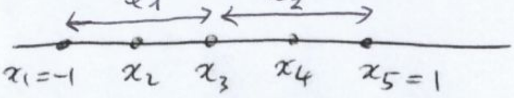
Soit $p \in \mathcal{P}_2 = \text{vect}\left\{1, x, y, x^2, xy, y^2\right\}$ tel que $p(S_1) = \cdots = p(S_6) = 0$.

1. Montrez que p s'annule sur les droites $(S_1\,S_2)$, $(S_2\,S_3)$ et $(S_3\,S_1)$.
2. En déduire que
$$\overrightarrow{\nabla p}\,(S_1) \cdot \overrightarrow{S_1S_2} = \overrightarrow{\nabla p}\,(S_1) \cdot \overrightarrow{S_1S_3} = 0,$$
où $\cdot$ désigne le produit scalaire et $\overrightarrow{\nabla p} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right)$ le gradient de p.
3. En déduire que $\overrightarrow{\nabla p}\,(S_1) = 0$. Dans la suite, on admettra qu'il est possible de raisonner de la même manière pour montrer que $\overrightarrow{\nabla p}\,(S_2) = \overrightarrow{\nabla p}\,(S_3) = 0$.
4. Montrez qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial p}{\partial x}(x, y) = a + b\,x + c\,y.$$
5. Montrez que $\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \neq 0$.
6. En déduire que $a = b = c = 0$, puis que $\frac{\partial p}{\partial x}$ est identiquement nul.
7. On admet qu'on peut montrer de la même manière que $\frac{\partial p}{\partial y}$ est identiquement nul. En déduire que p est identiquement nul.
8. On vient de montrer qu'un certain triplet $(e, \mathcal{P}_e, \Sigma_e)$ est un élément fini. Précisez quel est ce triplet.

Exercice 3. On considère le problème

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall x \in \Omega =]-1, 1[, \\ u(x) = g(x) & \forall x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où f et g sont des fonctions régulières données. On discrétise ce problème par la méthode des éléments finis, à l'aide du maillage ci-dessous, où les intervalles e sont munis de la structure d'éléments finis de l'exercice 1 (cf. juste au dessus de la question 1).



On note $V_h = \{u_h \in C(\overline{\Omega}) : \forall e,\ (u_h)_{|_e} \in \mathcal{P}_e\}$ l'espace d'interpolation et

$$U_h = \begin{pmatrix} u_h(x_1) \\ u_h''(x_2) \\ u_h(x_3) \\ u_h''(x_4) \\ u_h(x_5) \end{pmatrix}$$

les degrés de liberté du problème approché. On rappelle que U_h satisfait un problème matriciel de la forme

$$A\,U_h = F.$$

1. Complétez le tableau des correspondances entre les numérotations globales et locales des degrés de liberté suivant :

Elements

?	?	3
?	?	?

2. En déduire, **sans détailler les calculs**, les expressions de A_{33} et F_5 en fonction de g, des x_i, et des coefficients élémentaires A^e_{kn} et F^e_k définis à la question 5 de l'exercice 1.

①

$\boxed{\text{Correction de l'examen}}$

Exercice 1

$\boxed{1)}$ Supposons que $p \in \mathcal{P}_e$ avec $\ell_1^e(p) = \ell_2^e(p) = \ell_3^e(p) = 0$.

Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$p(x) = a + bx + cx^2.$$

On a $p''(m) = \ell_2^e(p) = 0$ et $p''(m) = 2c$.

On conclut que $c = 0$ et que $p \in \mathcal{P}_1 = \mathrm{Vect}\{1, x\}$.

De plus $p(S_1) = \ell_1^e(p) = 0 = \ell_2^e(p) = p(S_2)$.

On en déduit que p est le polynôme nul (car il a deux racines distinctes).

$\boxed{2)}$ On a $\varphi_2^e \in \mathrm{Vect}\{1, x, x^2\}$ avec : (Kronecker)

$$\begin{cases} \varphi_2^e(S_1) = \ell_1^e(\varphi_2^e) = \delta_{12} = 0 \\ (\varphi_2^e)''(m) = \ell_2^e(\varphi_2^e) = \delta_{22} = 1 \\ \varphi_2^e(S_2) = \ell_3^e(\varphi_2^e) = \delta_{32} = 0. \end{cases}$$

Puisque φ_2^e a 2 racines (S_1 et S_2), on a

$$\mathcal{P}_2^e(x) = c\,(x-S_1)(x-S_2) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

et pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$.

On détermine c en utilisant que

$$\left(\mathcal{P}_2^e\right)''(m) = 2c = 1.$$

On conclut que $c = \frac{1}{2}$ et donc que

$$\mathcal{P}_2^e(x) = \frac{(x-S_1)(x-S_2)}{2}.$$

$\boxed{3)}$ On raisonne comme au début de la question 1) pour montrer que $\mathcal{P}_1^e, \mathcal{P}_3^e \in \mathbb{P}_1 = \mathrm{Vect}\{1, x\}$, puisque ce sont des polynômes de degré au plus 2 tels que $\left(\mathcal{P}_1^e\right)''(m) = 0 = \left(\mathcal{P}_3^e\right)''(m)$.

<u>Pour $\mathcal{P}_1^e$:</u>

On a de plus $\begin{cases} \mathcal{P}_1^e(S_1) = 1 \\ \mathcal{P}_1^e(S_2) = 0. \end{cases}$

On déduit, comme on l'a déjà fait en cours, que

$$\mathcal{P}_1^e(x) = \frac{x-S_2}{S_1-S_2}.$$

Remarque

Pour ceux qui ont oublié : 3

on utilise le fait que $\varphi_1^e \in \mathbb{P}_1$ admet S_2 pour racine pour dire que $\varphi_1^e(x) = c\,(x - S_2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour une certaine constante c. On calcule c en utilisant que $\varphi_1^e(S_1) = c\,(S_1 - S_2) = 1$.

Pour φ_3^e :

On raisonne de la même manière.

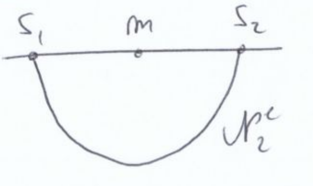
$\boxed{4)}$ On a $\left(\varphi_2^e\right)'(x) = \dfrac{(x - S_1) + (x - S_2)}{2}$.

En $x = S_1$, on trouve que

$$\boxed{\left(\varphi_2^e\right)'(S_1) = \frac{S_1 - S_2}{2} = -\frac{|e|}{2}.}$$

Par symétrie,

$$\boxed{\left(\varphi_2^e\right)'(S_2) = -\left(\varphi_1^e\right)'(S_1) = \frac{|e|}{2}}$$

(car φ_2^e est de la forme 

).

En $x = m$, on voit que φ_2^e atteint son minimum et

$$\boxed{\left(\varphi_2^e\right)'(m) = 0.}$$

Remarque

(Pour ceux qui ne voient pas le graphe de φ_2^e, faites tout les calculs comme pour $x = S_1$.) (4)

5)

Pour F_2^e

$$F_2^e = \int_e f \varphi_2^e$$

$$\simeq \frac{|e|}{6}\Big(\underbrace{\cancel{f(S_1)\varphi_2^e(S_1)}}_{\substack{\| \\ 0 \text{ car } \varphi_2^e(S_1)=0}} + 4 f(m)\varphi_2^e(m) + \underbrace{\cancel{f(S_2)\varphi_2^e(S_2)}}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{car } \varphi_2^e(S_2)=0}} \Big)$$

(Simpson)

$$\simeq \frac{|e|}{6}\, 4 f(m)\, \varphi_2^e(m).$$

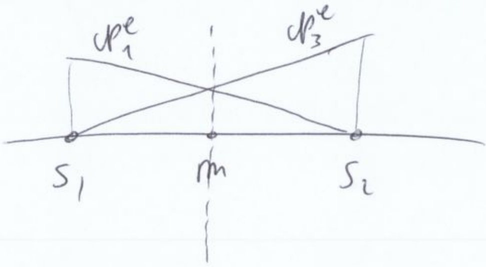
$$\text{car } \varphi_2^e(m) \underset{\text{question 2)}}{=} \frac{(m-S_1)(m-S_2)}{2} = \frac{\frac{|e|}{2} \times \left(-\frac{|e|}{2}\right)}{2} = -\frac{|e|^2}{8}$$

D'où $\boxed{F_2^e \simeq -\frac{|e|^3}{12} f(m).}$

⑤

Pour F_3^e

Pour aller un peu plus vite, on remarque que les graphes de φ_1^e et φ_3^e sont symétriques par rapport à l'axe $\{x = m\}$:



Par symétrie, on déduit que

$$\boxed{F_3^e \simeq |e| \left(\frac{f(s_2)}{6} + \frac{f(m)}{3} \right),}$$

puisque $F_1^e \simeq |e| \left(\frac{f(s_1)}{6} + \frac{f(m)}{3} \right)$.

Remarque :

Pour ceux qui ne le voient pas, utilisez le calcul classique suivant :

$$F_3^e \simeq \frac{|e|}{6} \left(f(s_1) \overbrace{\varphi_3^e(s_1)}^{0 \,=} + 4 f(m) \overbrace{\varphi_3^e(m)}^{1/2 \,=} + f(s_2) \overbrace{\varphi_3^e(s_2)}^{1 \,=} \right)$$

$$\simeq |e| \left(\frac{f(s_2)}{6} + \frac{f(m)}{3} \right).$$

Pour A^e_{12} (6)

signifie "identiquement égal à"

On remarque que $\left(\varphi^e_1\right)' \equiv -\frac{1}{|e|}$.

On a donc

$$A^e_{12} = -\frac{1}{|e|}\int_e \left(\varphi^e_2\right)' = -\frac{1}{|e|}\int_{S_1}^{S_2} \left(\varphi^e_2\right)'(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{|e|}\left(\varphi^e_2(S_2) - \varphi^e_2(S_1)\right) = 0$$

théorème fondamental du calcul

car $\varphi^e_2(S_1) = \varphi^e_2(S_2) = 0$

On aurait trouvé la même chose par la formule de Simpson, car cette formule est exacte pour les polynômes de degré ≤ 3 et $\left(\varphi^e_2\right)'\left(\varphi^e_1\right)' \in \mathbb{P}_1$!

On a donc $\boxed{A^e_{12} = 0.}$

Remarque :

Pour ceux qui ne le voient pas, faites le calcul classique

$$A^e_{12} = \frac{|e|}{6}\Big(\underbrace{\left(\varphi^e_2\right)'(S_1)}_{-\frac{|e|}{2}\ \text{(question 4)}}\underbrace{\left(\varphi^e_1\right)'(S_1)}_{= -\frac{1}{|e|}} + 4 \dots\Big) = \dots !$$

⑦

Pour A^e_{23}

On raisonne de la même manière en utilisant que $\left(\varphi^e_3\right)' \equiv + \frac{1}{|e|}$.

On a donc $\boxed{A^e_{23} = 0.}$

Pour A^e_{22}

$$A^e_{22} = \int_e \overbrace{\left[\left(\varphi^e_2\right)'\right]^2}^{\substack{g \\ \text{// notée}}}$$

$$= \frac{|e|}{6}\Big(\underbrace{g(s_1)}_{\substack{\| \\ \frac{|e|^2}{4}}} + 4\underbrace{g(m)}_{\substack{\| \\ 0}} + \underbrace{g(s_2)}_{\substack{\| \\ \frac{|e|^2}{4}}} \Big)$$

on a égalité par la formule de Simpson car $g \in \mathbb{P}_2$

(d'après la question 4))

$$\boxed{A^e_{22} = \frac{|e|^3}{12}.}$$

8

Pour A^e_{21} et A^e_{32}

Il est clair que A^e est symétrique puisque $A^e_{kM} = \int_e (\varphi^e_M)'(\varphi^e_k)'$.

On a donc

$$\boxed{\begin{aligned} A^e_{21} &= A^e_{12} = 0. \\ A^e_{32} &= A^e_{23} = 0. \end{aligned}}$$

(9)

On continue avec :

Exercice 3

1)

Elements

1	2	3
3	4	5

(C'est clair d'après la définition des éléments à l'exercice 1)

Remarque :

"degrés de liberté locaux"

Pour ceux qui ne le voient pas :

$\boxed{\text{On a sur chaque } e :}$

$$\mathcal{P}_e = \text{Vect}\{1, x, x^2\} \text{ et } \forall p \in \mathcal{P}_e, \quad \begin{cases} \lambda_1^e(p) = p(S_1) \\ \lambda_2^e(p) = p''(m) \\ \lambda_3^e(p) = p(S_2). \end{cases}$$

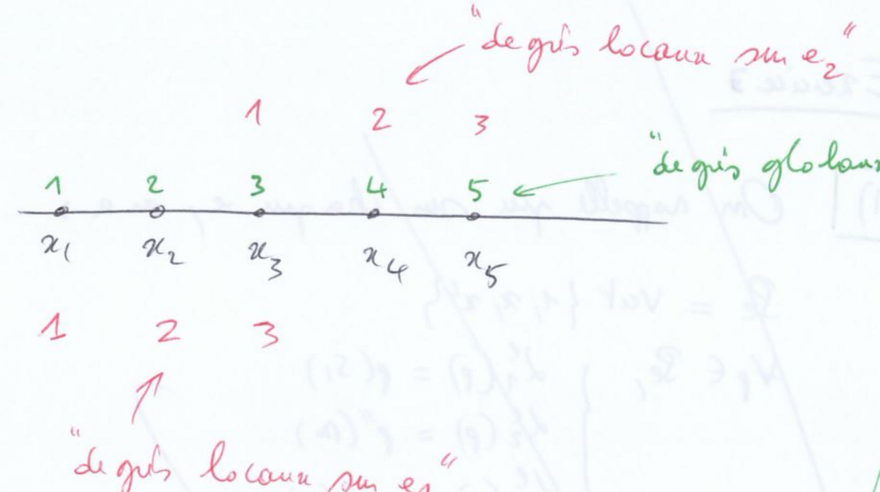
$\boxed{\text{Sur } \Omega, \text{ on a :}}$

$$U_h = \begin{pmatrix} \lambda_1(u_h) \\ \vdots \\ \lambda_5(u_h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_h(x_1) \\ u_h''(x_2) \\ u_h(x_3) \\ u_h''(x_4) \\ u_h(x_5) \end{pmatrix}$$

"degrés globaux"

⚠ c'est la dérivée seconde, et ce ne sont pas les éléments de Lagrange de degré 2 !

D'où les numérotations suivantes :



On a bien :

	Elements			
	1	2	3	e_1
	3	4	5	e_2

numéro global du 3ème degré de liberté local sur e_1

numéro global du 1er degré de liberté local sur e_2

$\boxed{2)}$

On a

$$\boxed{A_{33} = A^{e_1}_{33} + A^{e_2}_{11}.}$$

(cf. les remarques en vert ci-dessus)

(car $3 \notin I_D = \{1,5\}$)

Par contre

$$\boxed{F_5 = g(x_5)}$$

car $5 \in I_D$!

Exercice 2 (12)

$\boxed{1)}$

Sur chaque droite, p est un polynôme à une seule variable réelle ("de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$") de degré ≤ 2 et qui s'annule en 3 points distincts.

On conclut que $p \equiv 0$ sur $(S_1 S_2)$, $(S_2 S_3)$ et $(S_3 S_1)$.

$\boxed{2)}$ (Cette question est dure.)

On a $(S_1 S_2) = \{ t S_1 + (1-t) S_2 \text{ tel que } t \in \mathbb{R} \}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a donc

$$p(t S_1 + (1-t) S_2) = 0.$$

En dérivant, on obtient

$$(x_1 - x_2) \frac{\partial p}{\partial x} (t S_1 + (1-t) S_2) + (y_1 - y_2) \frac{\partial p}{\partial y} (t S_1 + (1-t) S_2) = 0.$$

En $t=1$, on déduit que,

$$\vec{\nabla} p(S_1)\cdot\overrightarrow{S_1S_2}=0.$$

On montre de la même façon que

$$\vec{\nabla} p(S_1)\cdot\overrightarrow{S_1S_3}=0.$$

$\boxed{3)}$ (Cette question est dure.)

On rappelle que deux vecteurs $\vec{V},\vec{W}\in\mathbb{R}^2$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{V}\cdot\vec{W}=0$.

La question 1) montre que $\vec{\nabla} p(S_1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{S_1S_2}$ et $\overrightarrow{S_1S_3}$. La seule possibilité est que $\vec{\nabla} p(S_1)$ soit le vecteur nul, puisque $\overrightarrow{S_1S_2}$ et $\overrightarrow{S_1S_3}$ sont tous les deux non nuls et non colinéaires.

(14)

$\boxed{4)}$ C'est évident puisque $p \in \mathcal{P}_2 = \text{Vect}\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$, donc $\frac{\partial p}{\partial x} \in \mathcal{P}_1 = \text{Vect}\{1, x, y\}$.

$\boxed{5)}$

"déterminant"

Posons

numéros des lignes

$$d = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \end{array}$$

On fait des opérations sur les lignes qui ne changent pas le déterminant.

$$d = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2') = (L_2) - (L_1) \\ (L_3) \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ 0 & x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2') \\ (L_3') = (L_3) - (L_1) \end{array}$$

car $\overrightarrow{S_1S_2}$ et $\overrightarrow{S_1S_3}$ ne sont pas colinéaires

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = \det\left(\overrightarrow{S_1S_2}, \overrightarrow{S_1S_3}\right) \neq 0.$$

$\boxed{6)}$

On a admis à la question 3) que

$$\vec{\nabla} p(x,y) = 0 \quad \text{pour} \quad (x,y) = S_1, S_2, S_3.$$

On a donc

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \text{pour} \quad (x,y) = S_1, S_2, S_3.$$

D'après la question 4),

$$\begin{cases} a + b x_1 + c y_1 = 0 \\ a + b x_2 + c y_2 = 0 \\ a + b x_3 + c y_3 = 0. \end{cases}$$

Mais d'après la question 5), ce système admet une et une seule solution (a, b, c).

Or $(0,0,0)$ est déjà solution, et on déduit que

$$a = b = c = 0.$$

D'après la question 4), $\dfrac{\partial p}{\partial x} \equiv 0$.

(16)

7) On admet que $\frac{\partial p}{\partial y} \equiv 0$.

On déduit que $\boxed{p \equiv \tilde{c} \text{ pour une certaine constante } \tilde{c} \in \mathbb{R}.}$

Puisque $p(S_1) = 0$, par exemple, on a $p \equiv \tilde{c} = 0$.

8)

- $e = \overset{\Delta}{S_1 S_2 S_3}$
- $\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_2$ (de dimension 6)
- $\forall p \in \mathcal{P}_e$, $\begin{cases} \mathcal{L}_1^e(p) = p(S_1) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_6^e(p) = p(S_6). \end{cases}$

(Ce sont les éléments finis de Lagrange de degré 2 sur des triangles.)

Chapitre 3

Examen de 2014-2015

(Tournez la page.)

durée ≃ 1h55

Examen d'approximation des EDPs

ENS2M, Semestre vert, 2014–2015

La calculatrice et les documents distribués en cours, TD et par email, sont autorisés.

L'approximation des EDPs par éléments finis conduit à des calculs élémentaires sur des mailles e. Les exercices de cet examen en sont quelques exemples.

Exercice 1. Soit un intervalle $e = [S_1, S_2]$, $S_2 > S_1$, muni de l'élément fini cubique de Hermite.

> **Rappels.** Celà veut dire que e est muni de l'espace vectoriel
>
> $$\mathcal{P}_e = \Big\{\text{polynômes } p : e \to \mathbb{R} \text{ de degré} \le 3\Big\},$$
>
> des formes linéaires $L_k^e : \mathcal{P}_e \to \mathbb{R}$ définies par
>
> $$\begin{cases} L_1^e(p) = p(S_1), \\ L_2^e(p) = p(S_2), \\ L_3^e(p) = p'(S_1), \\ L_4^e(p) = p'(S_2), \end{cases}$$
>
> et qu'il existe une base $\{N_1^e, \dots, N_4^e\}$ de $\mathcal{P}_e$ telle que
>
> $$L_k^e(N_n^e) = \delta_{kn} \quad \forall k, n \in \{1, \dots, 4\},$$
>
> où $\delta_{kn} = 1$ si $k = n$ et 0 sinon.

1. Soit $q : [0,1] \to \mathbb{R}$ défini pour tout $y \in [0,1]$ par :
$$q(y) = N_1^e\left(S_1 + y\,|e|\right),$$
où $|e| = S_2 - S_1$.
Montrez que $q(0) = 1$ et $q'(0) = 0$.
2. Calculez $q(1)$ et $q'(1)$.
3. Montrez que q est de la forme :
$$q(y) = (a\,y + b)\,(y-1)^2,$$
pour certaines constantes $a, b \in \mathbb{R}$.
4. Calculez a et b.

1

où $m = \frac{S_1+S_2}{2}$ comme précisé au tableau durant l'examen

5. En déduire que N_1^e peut s'écrire sous la forme :

$$N_1^e(x) = \alpha\, y^3 - \beta\, y^2 + \gamma \quad \text{où} \quad y = \frac{x - S_1}{|e|}$$

   (et où vous préciserez les constantes α, β et γ).
   Dans la suite, vous admettrez qu'on a aussi :

$$\begin{cases} N_2^e(x) = -2\, y^3 + 3\, y^2, \\ N_3^e(x) = |e|\, (y^3 - 2\, y^2 + y). \end{cases}$$

6. Calculez $N_3^e(m)$ et $(N_2^e)'(m)$. Les résultats devront dépendre seulement de $|e|$.
7. On considère maintenant des coefficients élémentaires, de la forme

$$\begin{aligned} A_{kn}^e &= \int_e a(x)\, (N_n^e)'(x)\, (N_k^e)'(x)\, dx, \\ F_k^e &= \int_e f(x)\, N_k^e(x)\, dx, \end{aligned}$$

   où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données. Donnez des approximations de F_3^e et A_{22}^e en utilisant la formule de Simpson.
   Les résultats devront dépendre seulement de $|e|$ et des valeurs de a et f en m. Vous devez aussi justifier vos calculs.

Exercice 2. Soit un intervale $e = [S_1, S_2]$, $S_2 > S_1$, que l'on muni de l'espace d'interpolation

$$\mathcal{P}_e = \Big\{ \text{polynômes } p : e \to \mathbb{R} \text{ de degré } \leq 3 \Big\}$$

et des formes linéaires $L_k^e : \mathcal{P}_e \to \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{cases} L_1^e(p) = p(S_1), \\ L_2^e(p) = p(S_2), \\ L_3^e(p) = p'(m), \\ L_4^e(p) = p''(m), \end{cases}$$

où $m = \frac{S_1+S_2}{2}$.
Dans la suite, on admet que ce triplet est un élément fini et on note $\{N_1^e, \ldots, N_4^e\}$ sa base d'interpolation.

1. On rappelle que

$$p(x) = \sum_{k=1}^{4} L_k^e(p)\, N_k^e(x) \quad \forall p \in \mathcal{P}_e,\ \forall x \in e.$$

En déduire que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ S_1 & S_2 & 1 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} N_1^e(x) \\ N_2^e(x) \\ N_3^e(x) \\ N_4^e(x) \end{pmatrix} \qquad \forall x \in e,$$

où vous complèterez les lignes manquantes de la matrice M. Vous justifierez seulement les calculs de la dernière ligne.

2. On considère les coefficients élémentaires

$$F_k^e = \int_e N_k^e(x)\, dx,$$

que l'on approche par la formule du centre :

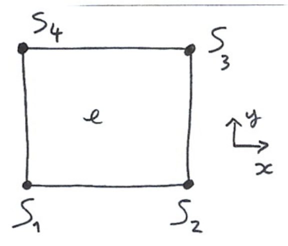
$$F_k^e \simeq (S_2 - S_1)\, N_k^e(m).$$

Ces coefficients peuvent se calculer par matlab, à l'aide de la fonction `Fe.m` en annexe. Les variables d'entrée et de sortie de cette fonction sont :

$$\texttt{Fe} : X = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \mapsto Y = \begin{pmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{pmatrix}.$$

Complétez les lignes des calculs de `M` et `Nc`.

Exercice 3. Soit un rectangle e de $\mathbb{R}^2$ comme ci-dessous.



On notera $S_k = (x_k, y_k)$ et on supposera que les arêtes sont parrallèles aux axes x et y, i.e. :

$$\begin{cases} x_1 = x_4, \\ x_2 = x_3, \\ y_1 = y_2, \\ y_3 = y_4. \end{cases}$$

Soient $\mathcal{P}_e$ l'espace de polynômes

$$\mathcal{P}_e = \text{vect}\,\{1, x, y, x\,y\}$$

et les fonctions $L_k^e : \mathcal{P}_e \to \mathbb{R}$ définies par

$$L_k^e(p) = p(S_k),$$

pour $k = 1, \ldots, 4$.

Motivation. On a admis en cours que ce triplet est un élément fini ; le but de cet exercice est de le montrer.

1. Répondez aux questions suivantes sans justifier vos réponses :
   (a) Est-ce que $\mathcal{P}_e$ est un espace vectoriel de dimension finie ?
   (b) Est-ce que les fonctions L_k^e sont linéaires ?
2. Soit la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1\,y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2\,y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3\,y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4\,y_4 \end{pmatrix}.$$
   Montrez que le déterminant de M satisfait :
$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1\,y_1 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2\,y_1 \\ 0 & 0 & y_3 - y_1 & x_2\,(y_3 - y_1) \\ 0 & 0 & y_3 - y_1 & x_1\,(y_3 - y_1) \end{vmatrix}.$$
3. En déduire que $\det(M) \neq 0$.
4. Soit $p : e \to \mathbb{R}$ un polynôme de la forme
$$p(x, y) = a + b\,x + c\,y + d\,x\,y,$$
   où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sont des constantes. Montrez que :
$$[p(S_1) = \cdots = p(S_4) = 0] \Rightarrow [a = b = c = d = 0].$$
5. Qu'en déduisez vous ?

4

1

Correction de l'examen

d'approximation des EDPs

2014-2015

Exercice 1

1) On a

$$q(0) = N_1^e(S_1) = L_1^e(N_1^e) = \delta_{11} = 1.$$

De même

$$q'(0) = |e|(N_1^e)'(S_1) = |e|\, L_3^e(N_1^e) = \delta_{31} = 0.$$

$$\left(\text{Car } q'(y) = |e|\,(N_1^e)'(S_1 + y|e|)\right)$$

2) On a

$$\boxed{q(1) = N_1^e(S_2) = L_2^e(N_1^e) = 0}$$

(car $S_1 + |e| = S_2$)

et $$\boxed{q'(1) = |e| \underbrace{(N_1^e)'(S_2)}_{= L_4^e(N_1^e)} = 0 .}$$

3) D'après la question 2), le polynôme q a une racine double en $y = 1$ (car $q(1) = 0$ et $q'(1) = 0$). On en déduit que

$$q(y) = r(y)\,(y-1)^2$$

pour un certain polynôme r.

Mais, on rappelle que $N_1^e = N_1^e(x)$ est un polynôme de degré ≤ 3 en x.

③

Ceci implique que

$$q(y) = N_1^e(S_1 + y|e|)$$

sera aussi de degré ≤ 3 en y. Par suite, r est de degré ≤ 1 et on conclut que

$$r(y) = ay + b$$

pour certaines constantes $a, b \in \mathbb{R}$.

4) D'après la question 1), on a

$$\begin{cases} q(0) = 1 \\ q'(0) = 0. \end{cases}$$

La question 3) implique donc que

$$\begin{cases} q(0) = b = 1 \\ q'(0) = a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{aligned} \text{Car } q'(y) &= \frac{d}{dy}\left[(ay+b)(y-1)^2\right] \\ &= a(y-1)^2 + 2(ay+b)(y-1) \end{aligned} \right)$$

(4)

et on conclut que

$$\boxed{\begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}}$$

5) On a maintenant

(définition de q)

$$q(y) = (2y+1)(y-1)^2$$
$$= 2y^3 - 3y^2 + 1 = N_1^e(S_1 + y|e|).$$

En posant $x = S_1 + y|e|$, i.e. $\boxed{y = \dfrac{x - S_1}{|e|}}$,

on obtient :

$$\boxed{N_1^e(x) = 2y^3 - 3y^2 + 1.}$$

5

6) Calculons d'abord $N_3^e(m)$.

Si $x = m \left(= \frac{S_1+S_2}{2}\right)$, alors $y = \frac{x-S_1}{|e|} = \frac{1}{2}$.

Donc, d'après les formules de la question 5),

$$N_3^e(m) = |e|\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)$$

i.e.
$$\boxed{N_3^e(m) = \frac{|e|}{8}.}$$

Calculons maintenant $(N_2^e)'(m)$.

On a

$$N_2^e(x) = -2y^3 + 3y^2$$

où $y = \frac{x-S_1}{|e|}$.

En dérivant, par rapport à x,

6

$$\left(N_2^e\right)'(x) = \frac{d}{dx}\left\{-2\left(\frac{x-s_1}{|e|}\right)^3 + 3\left(\frac{x-s_1}{|e|}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{|e|}\left\{-6\left(\frac{x-s_1}{|e|}\right)^2 + 6\left(\frac{x-s_1}{|e|}\right)\right\}$$

C'est la règle de la dérivée d'une fonction composée. Le facteur $\frac{1}{|e|}$ vient de la dérivée

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-s_1}{|e|}\right) = \frac{1}{|e|}$$

i.e. $$\left(N_2^e\right)'(x) = \frac{1}{|e|}\left(-6y^2 + 6y\right)$$

$$\left(\text{où} \quad y = \frac{x-s_1}{|e|}\right).$$

Par suite,

$$\left(N_2^e\right)'(m) = \frac{1}{|e|}\left(-6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6\,\frac{1}{2}\right)$$

i.e. $$\boxed{\left(N_2^e\right)'(m) = \frac{3}{2|e|}}\,.$$

7) On a

$$F_3^e = \int_e \overbrace{f(x)\,N_3^e(x)}^{\text{noté } g(x)}\,dx$$

$$\simeq \frac{|e|}{6}\Big(g(s_1) + 4\,g(m) + g(s_2)\Big)$$

(Simpson)

$$\simeq \frac{|e|}{6}\Big(\cancel{f(s_1)\underbrace{N_3^e(s_1)}_{=L_1^e(N_3^e)=0}} + 4\,f(m)\underbrace{N_3^e(m)}_{=\frac{|e|}{8}} + \cancel{f(s_2)\overbrace{N_3^e(s_2)}^{=L_2^e(N_3^e)=0}}\Big)$$

(question précédente)

donc

$$F_3^e \simeq \frac{|e|}{6}\left(4 f(m) \frac{|e|}{8}\right)$$

$$\boxed{F_3^e \simeq \frac{|e|^2}{12} f(m).}$$

De même

$$A_{22}^e = \int_e a(x)\left[\left(N_2^e\right)'(x)\right]^2 dx$$

$$\simeq \frac{|e|}{6}\left\{ \cancel{a(s_1)\left[\left(N_2^e\right)'(s_1)\right]^2} + 4\, a(m)\left[\left(N_2^e\right)'(m)\right]^2 + \cancel{a(s_2)\left[\left(N_2^e\right)'(s_2)\right]^2} \right\}$$

où
$$\begin{cases} \left(N_2^e\right)'(s_1) = L_3^e\left(N_2^e\right) = 0 \\ \left(N_2^e\right)'(s_2) = L_4^e\left(N_2^e\right) = 0. \end{cases}$$

(9)

On obtient, en utilisant encore la question précédente pour le dernier terme (en m) :

$$A^e_{22} \simeq \frac{|e|}{6}\left(4\,a(m)\left(\frac{3}{2|e|}\right)^2\right)$$

i.e. $\boxed{A^e_{22} \simeq \frac{3}{2|e|}\,a(m)\,.}$

Exercice 2

(10)

1) Utilisons la formule

$$(*) \quad \boxed{p(x) = \sum_{k=1}^{4} L_k^e(p)\, N_k^e(x) \qquad (\forall p \in \mathbb{P}_2)(\forall x \in e)}$$

avec $p(x) = x^3$.

Puisque $p'(x) = 3x^2$ et $p''(x) = 6x$,

on a
$$\begin{cases} L_1^e(p) = p(S_1) = S_1^3 \\ L_2^e(p) = p(S_2) = S_2^3 \\ L_3^e(p) = p'(m) = 3m^2 \\ L_4^e(p) = p''(m) = 6m \end{cases}$$

et $(*)$ implique que :

(11)

$$\boxed{x^3 = s_1^3 N_1^e(x) + s_2^3 N_2^e(x) + 3m^2 N_3^e(x) + 6m N_4^e(x)}$$

pour tout $x \in e$.

On montre de la même manière que

$$\boxed{\begin{cases} 1 = N_1^e(x) + N_2^e(x) \\ x = s_1 N_1^e(x) + s_2 N_2^e(x) + N_3^e(x) \\ x^2 = s_1^2 N_1^e(x) + s_2^2 N_2^e(x) + 2m N_3^e(x) + 2 N_4^e(x) \end{cases}}$$

(pour tout $x \in e$).

On en déduit l'écriture matricielle voulue avec

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & 1 & 0 \\ s_1^2 & s_2^2 & 2m & 2 \\ s_1^3 & s_2^3 & 3m^2 & 6m \end{pmatrix}}.$$

12

2) Voir l'annexe à la fin.

Exercice 3

1) a) Oui !

b) Oui !

2) On a

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2 y_1 \\ 1 & x_2 & y_3 & x_2 y_3 \\ 1 & x_1 & y_3 & x_1 y_3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4) \end{array}$$

Car $\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_3 \\ y_1 = y_2 \\ y_3 = y_4 \end{cases}$

d'où en effectuant des opérations sur les lignes qui ne changent pas le déterminant, (13)

$$\det M = \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \\ L_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \\ L_4 - L_1 \end{vmatrix}$$

i.e. $\det M = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_1 & x_2 y_1 \\ 0 & 0 & (y_3 - y_1) & x_2(y_3 - y_1) \\ 0 & 0 & (y_3 - y_1) & x_1(y_3 - y_1) \end{vmatrix}.$ (*)

3) On développe (*) par rapport à la 1ère colonne :

$$\det M = \begin{vmatrix} x_2 & y_1 & x_2 y_1 \\ 0 & (y_3 - y_1) & x_2 (y_3 - y_1) \\ 0 & (y_3 - y_1) & x_1 (y_3 - y_1) \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 0 & (y_3 - y_1) & x_2 (y_3 - y_1) \\ 0 & (y_3 - y_1) & x_1 (y_3 - y_1) \end{vmatrix}$$

$$\det M = x_2 \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} (y_3 - y_1) & x_2 (y_3 - y_1) \\ (y_3 - y_1) & x_1 (y_3 - y_1) \end{matrix}} \end{vmatrix}$$

$\updownarrow$ "même chose"

$$- x_1 \begin{vmatrix} \boxed{} \end{vmatrix}$$

(15)

$$\det M = x_2 (y_3 - y_1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}$$

$$- x_1 (y_3 - y_1)^2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}}_{= (x_1 - x_2)}$$

et $\boxed{\det M = -(x_2 - x_1)^2 (y_3 - y_1)^2.}$

Puisque $x_1 \neq x_2$ et $y_1 \neq y_3$, on en déduit que $\det M \neq 0$.

4) Supposons donc que

$$p(S_1) = \dots = p(S_4) = 0$$

où $p(x,y)$ est de la forme

$$p(x,y) = a + bx + cy + dxy.$$

Alors (16)

$$\begin{cases} P(S_1) = a + b x_1 + c y_1 + d x_1 y_1 = 0 \\ P(S_2) = a + b x_2 + c y_2 + d x_2 y_2 = 0 \\ P(S_3) = a + b x_3 + c y_3 + d x_3 y_3 = 0 \\ P(S_4) = a + b x_4 + c y_4 + d x_4 y_4 = 0 \end{cases}$$

i.e.

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et puisque $\det M \neq 0$, M est inversible, et on déduit que

$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

5) On a montré que : (17)

* $\mathcal{P}_e$ est un espace vectoriel de fonctions sur e de dimension finie (question 1)

* $\Sigma_e = \{L_1^e, \dots, L_4^e\}$ est une famille de formes linéaires sur $\mathcal{P}_e$ (question 1)

* $\dim \mathcal{P}_e = 4 = \text{Card}\, \Sigma_e$ (trivial)

* $(\forall p \in \mathcal{P}_e)$

  $[L_1^e(p) = \dots = L_4^e(p) = 0] \Rightarrow [p \text{ est identiquement nul}]$ (question 4)

d'où $(e, \mathcal{P}_e, \Sigma_e)$ est un élément fini.

Annexe de l'exercice 2, à compléter et à joindre à votre copie.

```
function Y=Fe(X)

S1=X(1);

S2=X(2);

m=(S1+S2)/2;

M=[1 1 0 0; S1 S2 1 0; S1^2 S2^2 2*m 2; S1^3 S2^3 3*m^2 6*m];

Nc=[1; m; m^2; m^3];

Ne=inv(M)*Nc;

Y=(S2-S1)*Ne;
```

(à mettre sur la même ligne)

Explications :

On doit calculer $Y=(S_2-S_1)\underbrace{\begin{pmatrix} N_1^e(m) \\ \vdots \\ N_4^e(m) \end{pmatrix}}_{\text{noté } Ne \text{ sur matlab}}$.

On a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 \\ m^3 \end{pmatrix}}_{\text{noté } Nc \text{ sur matlab}} = M \overbrace{\begin{pmatrix} N_1^e(m) \\ \vdots \\ N_4^e(m) \end{pmatrix}}^{=Ne},$$

donc $\boxed{Y=(S_2-S_1)M^{-1}Nc.}$

1

Chapitre 4

Examen de 2015-2016

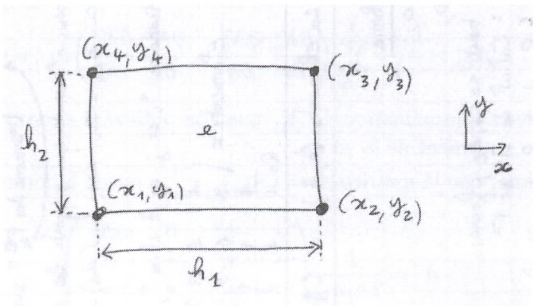
(Tournez la page.)

Examen d'approximation des EDPs

ENS2M, Semestre vert, 2015–2016 (durée 2 heures)

La calculatrice et les documents distribués en cours par l'ens2m sont autorisés.

Exercice 1. Soit $e \subset \mathbb{R}^2$ un rectangle dont les arêtes sont parrallèles aux axes x et y. On note (x_k, y_k) ses sommets et h_1, h_2 les longueurs de ses arêtes comme ci-dessous.



On muni e de l'élément fini de Lagrange Q_1 et on note $\{N_1^e, \ldots, N_4^e\}$ sa base d'interpolation.

Rappels : l'espace d'interpolation est

$$\mathcal{P}_e = \text{vect}\{1, x, y, x\,y\}$$

et les degrés de liberté $L_k^e : \mathcal{P}_e \to \mathbb{R}$ sont définis par

$$\begin{cases} L_1^e(p) = & p(x_1, y_1), \\ \vdots & \vdots \\ L_4^e(p) = & p(x_4, y_4). \end{cases}$$

1. Etant donnée $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on considère les coefficient élémentaires

$$F_k^e = \iint_e f(x, y)\, N_k^e(x, y)\, dxdy,$$

que l'on approche par la formule « trapèzes $\times$ trapèzes » :

$$F_k^e \simeq \frac{h_1 h_2}{4} \sum_{i=1}^{4} f(x_i, y_i)\, N_k^e(x_i, y_i).$$

1

Calculez les approximations que l'on obtient pour $F_1^e, \ldots, F_4^e$. Les résultats doivent dépendre seulement des $f(x_k, y_k)$ et de h_1, h_2.

2. Montrez que pour tout $(x, y) \in e$,

$$N_1^e(x, y) = \frac{(x - x_3)(y - y_3)}{h_1 h_2}.$$

3. Calculez $\frac{\partial N_1^e}{\partial x}(x_k, y_k)$ et $\frac{\partial N_1^e}{\partial y}(x_k, y_k)$ pour tout $k = 1, \ldots, 4$. Les résultats doivent dépendre seulement de h_1 et h_2.

4. On considère les coefficients élémentaires

$$A_{kn}^e = \iint_e \left(\frac{\partial N_n^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_n^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right) (x, y)\, dxdy,$$

que l'on approche par la formule précédente :

$$A_{kn}^e \simeq \frac{h_1 h_2}{4} \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial N_n^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_n^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right) (x_i, y_i).$$

Calculez l'approximation de A_{11}^e que l'on obtient. Le résultat doit dépendre seulement de h_1 et h_2.

5. On admet que la matrice $A^e = (A_{kn}^e)_{1 \leq k, n \leq 4}$ est de la forme

$$A^e = \frac{1}{2\, h_1 h_2} \begin{pmatrix} * & -h_1^2 & 0 & -h_2^2 \\ * & * & -h_2^2 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Complétez les $*$ manquantes sans justifier vos réponses. Les résultats doivent dépendre seulement de h_1 et h_2.

(Imaginez par exemple faire des rotations de e, etc. !)

6. Donnez un exemple de problème aux limites « équation+conditions aux bords », dont l'approximation par éléments finis conduit au calcul des coefficients élémentaires de cet exercice. Ne justifiez pas votre réponse.

Exercice 2. Soient $S_1 < S_2$ et $e = [S_1, S_2]$. On note x la variable générale de l'intervalle e. On muni e de l'espace d'interpolation

$$\mathcal{P}_e = \left\{ \text{polynômes } p \colon e \to \mathbb{R} \text{ de degré} \leq 2 \right\} = \text{vect}\{1, x, x^2\},$$

et des degré de liberté $L_k^e : \mathcal{P}_e \to \mathbb{R}$ définis par

$$\begin{cases} L_1^e(p) = p(S_1), \\ L_2^e(p) = \frac{1}{|e|} \int_e p(x)\, dx, \\ L_3^e(p) = p(S_2), \end{cases}$$

où $|e| = S_2 - S_1$ désigne la longueur de e.

1. Montrez que le triplet $(e, \mathcal{P}_e, \{L_1^e, L_2^e, L_3^e\})$ est unisolvant. Vous en déduirez que c'est un élément fini, en admettant que les autres propriétés sont vraies.

2. Soit l'élément de référence $\hat{e} = [-1, 1]$, dont on note y la variable. Sur cet élément, on a l'espace d'interpolation

⚠ FAUTE DE FRAPPE

$$\mathcal{P}_{\hat{e}} = \Big\{\text{polynômes } q : \hat{e} \to \mathbb{R} \text{ de degré} \leq 2\Big\} = \text{vect}\{1, y, y^2\},$$

et les degrés de liberté

(Comme mentionné durant l'examen)

$\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} L_1^{\hat{e}}(q) = q(-1), \\ L_2^{\hat{e}}(q) = \int_{-1}^{1} q(y)\, dy, \\ L_3^{\hat{e}}(q) = q(1). \end{cases}$$

Etant donné $p \in \mathcal{P}_e$, on définit $q : \hat{e} \to \mathbb{R}$ par

$$q(y) = p\left(m + \frac{|e|}{2}\, y\right),$$

où $m = \frac{S_1 + S_2}{2}$ désigne le milieu de e. Montrez que $q \in \mathcal{P}_{\hat{e}}$ et que

$$L_k^{\hat{e}}(q) = L_k^e(p) \quad (\forall k = 1, 2, 3).$$

3. On note $\{N_1^e, N_2^e, N_3^e\}$ la base d'interpolation de $\mathcal{P}_e$. Montrez que

$$N_k^{\hat{e}}(y) = N_k^e\left(m + \frac{|e|}{2}\, y\right) \quad (\forall k = 1, 2, 3), \ (\forall y \in \hat{e}).$$

Vous justifierez votre réponse seulement pour $k = 1$, étant donné que le raisonnement est le même pour $k = 2$ et 3.

4. En déduire que $N_k^e(m) = N_k^{\hat{e}}(0)$ pour tout $k = 1, 2, 3$.

5. On note $N_k^{\hat{e}}(0) = v_k$ et on admet que

$$\begin{cases} 1 = v_1 + v_2 + v_3, \\ 0 = -v_1 + v_3, \\ 0 = v_1 + \frac{1}{3} v_2 + v_3. \end{cases}$$

Résolvez ce système et en déduire les valeurs de $N_1^e(m)$, $N_2^e(m)$ et $N_3^e(m)$.

6. Etant donnée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on considère les coefficient élémentaires

$$F_k^e = \int_e f(x)\, N_k^e(x)\, dx.$$

On approche ces coefficients par la formule de Simpson

$$F_k^e \simeq \frac{|e|}{6}\,(g(S_1) + 4\,g(m) + g(S_2)),$$

où $g(x) = f(x)\,N_k^e(x)$.

Calculez les approximations que l'on obtient pour F_1^e, F_2^e et F_3^e. Les résultats doivent dépendre seulement de $f(S_1)$, $f(m)$, $f(S_2)$ et $|e|$.

7. On note $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ la matrice de passage qui permet d'avoir la formule suivante :

$$\begin{cases} 1 = a_{11}\,N_1^e(x) + a_{12}\,N_2^e(x) + a_{13}\,N_3^e(x),\\ x = a_{21}\,N_1^e(x) + a_{22}\,N_2^e(x) + a_{23}\,N_3^e(x),\\ x^2 = a_{31}\,N_1^e(x) + a_{32}\,N_2^e(x) + a_{33}\,N_3^e(x), \end{cases}$$

pour tout $x \in e$. Calculez M en fonction de S_1 et S_2.

8. Vérifiez que si $S_1 = -1$ et $S_2 = 1$, on retrouve la matrice du système de la question 5.

9. Montrez que pour tout $x \in e$,

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} (N_1^e)'(x) \\ (N_2^e)'(x) \\ (N_3^e)'(x) \end{pmatrix},$$

où vous préciserez les $*$ manquantes.

10. On considère maintenant les coefficients élémentaires

$$A_{kn}^e = \int_e (N_n^e)'(x)\,(N_k^e)'(x)\,dx,$$

que l'on approche par la formule de Gauss à 2 points. On note `Ae(k,n)` les approximations obtenues, ce qui donne

$$\texttt{Ae(k,n)} = |e|\sum_{i=1}^{2}\omega_i\,(N_n^e)'(\xi_i)\,(N_k^e)'(\xi_i),$$

où $\xi_1 = m - \frac{|e|}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\xi_2 = m + \frac{|e|}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$. Complétez la fonction `Matrice.m` en annexe, qui permet de calculer ces coefficients en fonction de la variable $\texttt{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$.

11. Donnez un exemple de problème aux limites « équation+conditions aux bords », dont l'approximation par éléments finis conduit au calcul des coefficients élémentaires de cet exercice. Ne justifiez pas votre réponse.

①

Corrigé de l'examen d'approximation des EDPs de 2015-2016

Exercice 1

1) Les fonctions d'interpolation N_k^e satisfont les équations :

$$\boxed{L_k^e(N_m^e) = \delta_{km} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

pour tout $k,m = 1,\dots,4$. Par suite,

$$F_k^e \simeq \frac{h_1 h_2}{4} \sum_{i=1}^{4} f(x_i,y_i) \underbrace{N_k^e(x_i,y_i)}_{= L_i^e(N_k^e) = \delta_{ik}}$$

$\delta_{ik} = 1$ seulement pour $i=k$

donc $$\boxed{F_k^e \simeq \frac{h_1 h_2}{4} f(x_k,y_k).}$$

2

2) Le polynôme N_1^e est l'unique polynôme de $\mathcal{P}_e$ qui satisfait les équations précédentes, ie :

$$\boxed{L_k^e(N_1^e) = \delta_{k1} \quad \forall k = 1, \dots, 4.}$$

Il suffit donc de montrer que le polynôme

$$p : (x,y) \longmapsto \frac{(x-x_3)(y-y_3)}{h_1 h_2}$$

est dans $\mathcal{P}_e$ et satisfait les mêmes équations.

Il est clair que $p \in \mathcal{P}_e = \text{Vect}\{1, x, y, xy\}$. De plus,

$$L_1^e(p) = \frac{(x_1-x_3)(y_1-y_3)}{h_1 h_2}$$

$$= \frac{(x_1-x_3)(y_1-y_3)}{(x_1-x_3)(y_1-y_3)} = 1.$$

car $h_1 = x_3 - x_1$
et $h_2 = y_3 - y_1$ (d'après le dessin)

Ensuite

$$L_2^e(p) = \frac{(x_2-x_3)(y_2-y_3)}{h_1 h_2}$$

$$= 0$$

car $x_2 = x_3$ puisque les arêtes de e sont parallèles aux axes x et y

3

et $L_3^e(p) = L_4^e(p) = 0$

(car $x_3 - x_3 = 0$ et $y_4 = y_3$.) Ceci termine la preuve.

3) On a $\dfrac{\partial N_1^e}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y - y_3}{h_1 h_2}$, d'où

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x}(x_1,y_1) = \dfrac{y_1 - y_3}{h_1 h_2} = -\dfrac{h_2}{h_1 h_2} = -\dfrac{1}{h_1} \quad \text{car } h_2 = y_3 - y_1 \\[2ex] \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x}(x_2,y_2) = \dfrac{y_2 - y_3}{h_1 h_2} = -\dfrac{1}{h_1} \quad \text{car } y_2 = y_1 \\[2ex] \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x}(x_4,y_4) = \dfrac{\partial N_1^e}{\partial x}(x_3,y_3) = 0. \quad \text{car } y_4 = y_3 \end{cases}}$$

On calcule $\dfrac{\partial N_1^e}{\partial y}$ de la même manière et on trouve que

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y}(x_1,y_1) = -\dfrac{1}{h_2} = \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y}(x_4,y_4) \\[2ex] \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y}(x_2,y_2) = 0 = \dfrac{\partial N_1^e}{\partial y}(x_3,y_3). \end{array}}$$

(4)

4) $$A^e_{11} \simeq \frac{h_1 h_2}{4}\Bigg(\overbrace{\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}}^{\text{pour } i=1} + \overbrace{\frac{1}{h_1^2} + 0}^{i=2} + \underbrace{0 + 0}_{i=3} + \underbrace{0 + \frac{1}{h_2^2}}_{i=4} \Bigg)$$

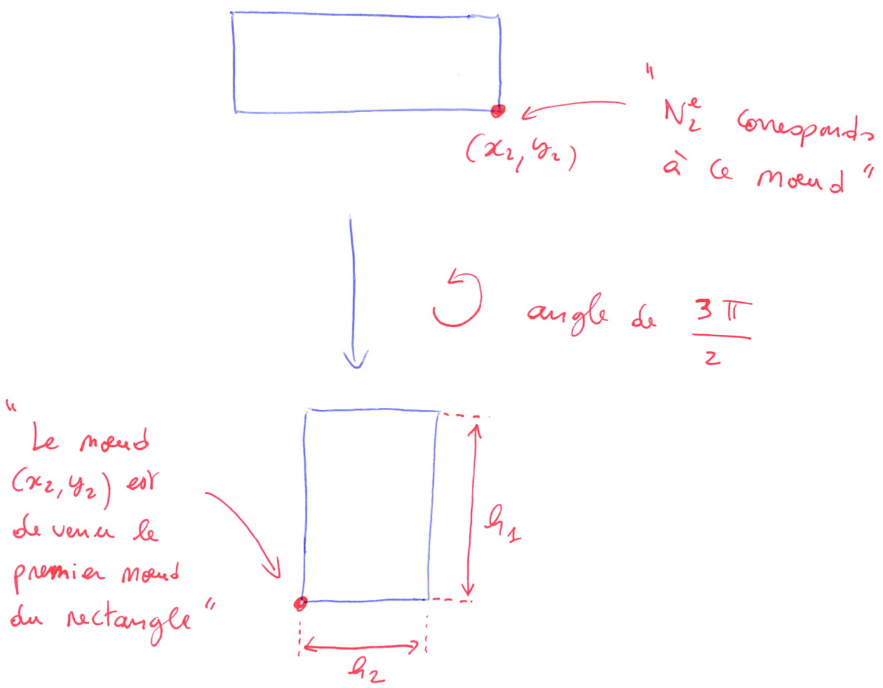
d'où $$\boxed{A^e_{11} \simeq \frac{1}{2h_1h_2}\left(h_1^2 + h_2^2\right).}$$

5) Ce n'est pas la peine de faire les calculs, car on peut deviner les * à partir des autres coefficients. D'après les "symétries" de l'élément, on trouve que

$$\boxed{A^e \simeq \frac{1}{2h_1h_2}\begin{pmatrix} h_1^2+h_2^2 & -h_1^2 & 0 & -h_2^2 \\ -h_1^2 & h_1^2+h_2^2 & -h_2^2 & 0 \\ 0 & -h_2^2 & h_1^2+h_2^2 & -h_1^2 \\ -h_2^2 & 0 & -h_1^2 & h_1^2+h_2^2 \end{pmatrix}.}$$

(En effet, on peut toujours faire une rotation de e et renuméroter les noeuds pour voir les liens entre les différents coefficients. Par exemple, pour le calcul de A^e_{22}, cela

Consiste à faire la rotation (5)



puis le même calcul qu'aux questions précédentes donne $A^e_{22} \simeq \frac{1}{2h_2h_1}\left(h_2^2 + h_1^2\right) \simeq A^e_{11}$.

On raisonne de la même manière pour montrer que

$$\boxed{A^e_{44} = A^e_{33} = A^e_{22} = A^e_{11}}$$

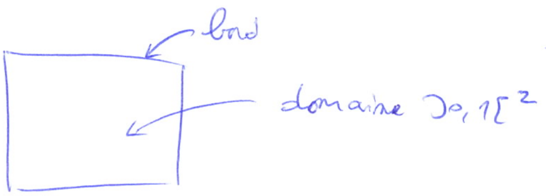
puis que $\boxed{A^e_{34} = A^e_{12}}$.

(5)

On complète enfin le reste des coefficients en utilisant le fait que A^e est symmétrique.)

6) L'approximation du problème

$$\begin{cases} \boxed{-\Delta u(x,y) = f(x,y)} & \forall x,y \in]0,1[^2 \\ u = 0 \quad \text{sur le bord de }]0,1[^2 \end{cases}$$

(
)

Conduisant au calcul de les coefficients élémentaires, en considérant les éléments finis Q_1 pour le maillage.

(On pourrait en fait considérer différents domaines et conditions aux limites, car c'est surtout l'équation qui est importante pour la définition des coefficients A^e_{kM} et F^e_k ; voir le cours.)

Exercice 2

1) On doit montrer que

$$\boxed{(\forall p \in \mathcal{P}_e) \quad \left[L_1^e(p) = L_2^e(p) = L_3^e(p) = 0 \Rightarrow p \text{ est le polynôme nul} \right]}$$

preuve

Soit $p \in \mathcal{P}_e$ tel que $L_1^e(p) = L_2^e(p) = L_3^e(p) = 0$. On a

$$p(s_1) = p(s_2) = 0$$

par définition des ddls L_1^e et L_3^e. Puisque p est un polynôme de degré ≤ 2, par définition de $\mathcal{P}_e$, on déduit que

$$p(x) = a(x - s_1)(x - s_2) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

pour une certaine constante $a \in \mathbb{R}$. Finalement,

$$\begin{aligned}
0 = L_2^e(p) &= \frac{1}{|e|} \int_e p(x)\, dx \\
&= \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} a\,(x - s_1)(x - s_2)\, dx \\
&= a \underbrace{\left[\frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} (x - s_1)(x - s_2)\, dx \right]}_{\neq 0}
\end{aligned}$$

car la fonction $x \longmapsto (x - s_1)(x - s_2)$ est < 0 dans $]s_1, s_2[$

et on déduit que $a = 0$.

Par suite, $p(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et on conclut que ⑦

$(e, \mathcal{P}_e, \{L_1^e, \dots, L_3^e\})$ est un élément fini.

(puisque les autres propriétés à vérifier sont triviales!)

2) Considérons p et q comme dans l'énoncé. On a

$$\begin{aligned} L_1^{\hat{e}}(q) &= q(-1) \\ &= p\left(m - \frac{|e|}{2}\right) \\ &= p\left(\frac{s_1+s_2}{2} - \frac{s_2-s_1}{2}\right) \\ &= p(s_1) \\ &= L_1^e(p). \end{aligned}$$

On montre de la manière que

$$L_3^{\hat{e}}(q) = L_3^e(p).$$

Finalement

$$\begin{aligned} L_2^{\hat{e}}(q) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} q(y)\, dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p\left(m + \frac{|e|}{2} y\right) dy \\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\int_{s_1}^{s_2} p(x) \frac{\cancel{2}}{|e|}\, dx = L_2^e(p). \end{aligned}$$

changement de variable

$x = m + \frac{|e|}{2} y$ d'où $dx = \frac{|e|}{2} dy$

(8)

Il reste à vérifier que $q \in \mathbb{P}_{\hat{e}} = \mathrm{Vect}\{1, y, y^2\}$.
Remarquons d'abord que, puisque $p \in \mathrm{Vect}\{1, x, x^2\}$, il existe des constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ telles que

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad \forall x \in e.$$

Par suite, pour tout $y \in \hat{e}$, on a

$$q(y) = p\left(m + \frac{|e|}{2} y\right)$$
$$= a\left(m + \frac{|e|}{2} y\right)^2 + b\left(m + \frac{|e|}{2}\right) y + c$$

et on déduit facilement que $q \in \mathrm{Vect}\{1, y, y^2\}$ en développant.

3) Faisons la preuve seulement pour $N_1^{\hat{e}}$. Cette fonction d'interpolation est l'unique polynôme de $\mathbb{P}_{\hat{e}}$ tel que $L_k^{\hat{e}}(N_1^{\hat{e}}) = \delta_{k1}$ $\forall k = 1, 2, 3$. Il suffit donc de montrer que le polynôme

$$q : y \longmapsto N_1^e\left(m + \frac{|e|}{2} y\right)$$

est dans $\mathbb{P}_{\hat{e}}$ et satisfait les mêmes équations. Mais c'est une conséquence immédiate de la question précédente avec $p = N_1^e$.

4) Si on prends $y=0$ dans la formule (9)

$$N_k^{\hat{e}}(y) = N_k^e\left(m + \frac{|e|}{2}y\right),$$

on déduit que $N_k^{\hat{e}}(0) = N_k^e(m) \quad \forall k = 1,2,3.$

5) On a

$$\begin{cases} 1 = N_1 + N_2 + N_3 & (L_1) \\ 0 = -N_1 + N_3 & (L_2) \\ 0 = N_1 + \frac{1}{3}N_2 + N_3 & (L_3) \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 1 = N_1 + N_2 + N_3 & (L_1) \\ N_1 = N_3 & (L_2) \\ N_2 = 3/2 & (L_3') = \left[(L_1) - (L_3)\right] \times 3/2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \quad \text{(Par substitution !)}$$

$$\boxed{\begin{cases} N_1 = -1/4 \\ N_2 = 3/2 \\ N_3 = -1/4. \end{cases}}$$

D'où

$$\boxed{N_1^e(m) = -\frac{1}{4} = N_3^e(m) \quad \text{et} \quad N_2^e(m) = \frac{3}{2}}$$

(d'après la formule $N_k^e(m) = N_k^{\hat{e}}(0) = N_k$.)

6) On a (10)

$$F_1^e \simeq \frac{|e|}{6}\Big(f(s_1)\, \overbrace{N_1^e(s_1)}^{= L_1^e(N_1^e) = 1} + 4 f(m)\, \overbrace{N_1^e(m)}^{= -1/4 \text{ d'après ce qui précède}} + f(s_2)\, \underbrace{\cancel{N_1^e(s_2)}}_{= L_3^e(N_1^e) = 0} \Big)$$

d'où $\boxed{F_1^e \simeq \frac{|e|}{6}\big(f(s_1) - f(m)\big).}$

De même

$$F_2^e \simeq \frac{|e|}{6}\Big(f(s_1)\, \cancel{N_2^e(s_1)} + 4 f(m)\, \overbrace{N_2^e(m)}^{= 3/2} + f(s_2)\, \cancel{N_2^e(s_2)} \Big)$$

ie $\boxed{F_2^e \simeq |e|\, f(m)}$

et $\boxed{F_3^e \simeq \frac{|e|}{6}\big(f(s_2) - f(m)\big).}$

(calcul similaire à F_1^e)

(11)

7) Pour tout $p \in \mathbb{P}_e$, on a

$$\boxed{p(x) = \sum_{k=1}^{3} L_k^e(p)\, N_k^e(x) \quad \forall x \in e.}$$

Appliquons cette formule pour le polynôme $p(x) = 1$.

On obtient que pour tout $x \in e$,

$$1 = \underbrace{L_1^e(p)}_{\substack{\| \\ p(s_1) \\ \| \\ 1}}\, N_1^e(x) + \underbrace{L_2^e(p)}_{\substack{\| \\ \frac{1}{|e|}\int_e p(t)\,dt \\ \| \\ \frac{1}{|e|}\int_e 1\,dt \\ \| \\ \frac{|e|}{|e|} \\ \| \\ 1}}\, N_2^e(x) + \underbrace{L_3^e(p)}_{\substack{\| \\ p(s_2) \\ \| \\ 1}}\, N_3^e(x)$$

C'est une variable muette, on a choisi de l'écrire "t" pour ne pas confondre avec le "x" qui est fixé ici !

ie $$\boxed{1 = N_1^e(x) + N_2^e(x) + N_3^e(x).}$$

On raisonne de même pour $p(x) = x$ et $p(x) = x^2$,

et on trouve que :

(12)

$$x = s_1 N_1^e(x) + \underbrace{\frac{1}{|e|}\int_e t\,dt}_{\substack{\| \\ \frac{1}{s_2-s_1}\int_{s_1}^{s_2} t\,dt \\ \| \\ \frac{1}{s_2-s_1}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{s_1}^{s_2} \\ \| \\ \frac{1}{2(s_2-s_1)}(s_2^2-s_1^2) \\ \| \\ \frac{s_1+s_2}{2}}} N_2^e(x) + s_2 N_3^e(x)$$

car $s_2^2 - s_1^2 = (s_2-s_1)(s_1+s_2)$

ie $$\boxed{x = s_1 N_1^e(x) + \frac{s_1+s_2}{2} N_2^e(x) + s_2 N_3^e(x)},$$

et $$x^2 = s_1^2 N_1^e(x) + \underbrace{\frac{1}{|e|}\int_e t^2\,dt}_{\substack{\| \\ \frac{1}{s_2-s_1}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{s_1}^{s_2} \\ \| \\ \frac{1}{3(s_2-s_1)}(s_2^3-s_1^3) \\ \| \\ \frac{s_1^2+s_1s_2+s_2^2}{3}}} N_2^e(x) + s_2^2 N_3^e(x)$$

car $s_2^3 - s_1^3 = (s_2-s_1)(s_1^2+s_1s_2+s_2^2)$

ie $$\boxed{x^2 = s_1^2 N_1^e(x) + \frac{s_1^2+s_1s_2+s_2^2}{3} N_2^e(x) + s_2^2 N_3^e(x)}.$$

(13)

On conclut, par identification, que

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_1 & \dfrac{s_1+s_2}{2} & s_2 \\ s_1^2 & \dfrac{s_1^2+s_1s_2+s_2^2}{3} & s_2^2 \end{pmatrix}.}$$

8) Si $s_1 = -1$ et $s_2 = 1$, on retrouve bien la matrice

$$\boxed{\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}}$$

du système de la question 5.

(C'est aussi la matrice de passage pour l'élément de référence $\hat{e}$, d'où le système de la question 5 servant à calculer $N_1^{\hat{e}}(0)$, $N_2^{\hat{e}}(0)$ et $N_3^{\hat{e}}(0)$!)

14

9) En dérivant le système de la question 7 en x, on obtient

$$\begin{cases} 0 = a_{11} (N_1^e)'(x) + a_{12} (N_2^e)'(x) + \dots \\ 1 = \dots \\ 2x = \dots, \end{cases}$$

d'où

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} (N_1^e)'(x) \\ \vdots \\ (N_3^e)'(x) \end{pmatrix} \qquad (\forall x \in e).}$$

10) Voir l'annexe.

11) L'approximation du problème

$$\begin{cases} \boxed{-u''(x) = f(x)} & \forall x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

conduit au calcul des coefficients de cet exercice, en considérant un maillage avec les éléments finis de la question 1.

(On pourrait en fait considérer différents domaines et conditions aux bords, car c'est surtout l'équation qui est importante pour la définition des coefficients A^e_{km} et F^e_k ; voir le cours.)

ANNEXE A JOINDRE A VOTRE COPIE

A COMPLETER EN LANGUAGE MATLAB

```
function Ae=Matrice(S)

S1=S(1);
S2=S(2);
m=(S1+S2)/2;
h=S2-S1;          longueur de e

xi=zeros(2,1);
xi(1)=m-(h/2)*(sqrt(3)/3);
xi(2)=m+(h/2)*(sqrt(3)/3);

omega=zeros(2,1);            "sur le même ligne"
omega(1)=1/2;
omega(2)=1/2;

M= [1 1 1; S1 (S1+S2)/2 S2;
   espace
    S1^2 (S1^2+S1*S2+S2^2)/3 S2^2];

Ae=zeros(3,3);
for i=1:2
    x=xi(i);

    dNc= [0; 1; 2*x];

    dNe=inv(M)*dNc;
        for k=1:3
            for n=1:3
            Ae(k,n)= Ae(k,n) + h*omega(i)*dNe(n)*dNe(k);

            end
        end
end
```

"donne $dNe = \begin{pmatrix} (N_1^e)'(\xi_i) \\ \vdots \\ (N_3^e)'(\xi_i) \end{pmatrix}$"

1

Chapitre 5

Examen de 2016-2017

(Tournez la page.)

Examen d'approximation des EDPs

ENS2M, Semestre vert, printemps 2016–2017

Matériels autorisés : calculatrice, notes personnelles et documents de l'ens2m.

Exercice 1. Soit $e = [S_1, S_2]$, $S_2 > S_1$, que l'on munit de l'espace d'interpolation

$$\mathcal{P}_e = \Big\{\text{polynômes } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ de degré} \leq 3\Big\}$$

et des formes linéaires $L_k^e : \mathcal{P}_e \to \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{cases} L_1^e(p) = p(S_1), \\ L_2^e(p) = p(S_2), \\ L_3^e(p) = p'(m), \\ L_4^e(p) = p''(m), \end{cases}$$

où $m = \frac{S_1+S_2}{2}$.

1. Montrez que ce triplet est un élément fini. Vous montrerez seulement l'unisolvance et vous admettrez les autres propriétés.
2. On considère l'élément de référence

$$\hat{e} = [0, 1]$$

   et on note $\{N_1^{\hat{e}}, \dots, N_4^{\hat{e}}\}$ sa base d'interpolation. On note aussi y la variable de ces fonctions. Montrez que

$$N_4^{\hat{e}}(y) = \frac{y(y-1)}{2} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

3. Montrez qu'il existe des réels a et b tels que

$$N_3^{\hat{e}}(y) = y(y-1)(ay+b) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

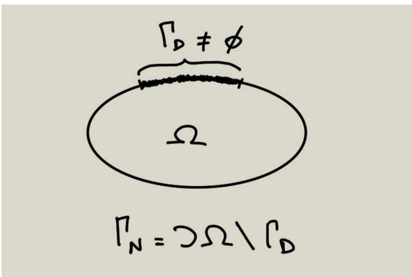
4. Calculez a et b.
5. On considère des coefficients élémentaires de la forme

$$F_k^{\hat{e}} = \int_0^1 g(y) N_k^{\hat{e}}(y)\, dy,$$

   pour une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée. Calculez les approximations de $F_3^{\hat{e}}$ et $F_4^{\hat{e}}$ obtenues par la formule de Simpson. Les résultats devront dépendre seulement de $g(1/2)$.

6. On note maintenant $\{N_1^e, \ldots, N_4^e\}$ la base d'interpolation associée à l'élément général
$$e = [S_1, S_2].$$
Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$N_3^e(x) = |e| N_3^{\hat{e}} \left(\frac{x - S_1}{|e|} \right) \quad \text{et} \quad N_4^e(x) = |e|^2 N_4^{\hat{e}} \left(\frac{x - S_1}{|e|} \right),$$
où $|e| = S_2 - S_1$.
7. On considère des coefficients élémentaires de la forme
$$F_k^e = \int_{S_1}^{S_2} f(x) N_k^e(x) \, dx,$$
pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée. Exprimez F_3^e et F_4^e en fonction de coefficients de la forme $F_k^{\hat{e}}$, où vous préciserez g.
8. En déduire des approximations de F_3^e et F_4^e. Les résultats devront dépendre seulement de $f(m)$ et $|e|$.

Exercice 2. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $\{\Gamma_D, \Gamma_N\}$ une partition de son bord telle que $\Gamma_D \neq \emptyset$, comme sur le dessin ci-dessous.



Etant donné une fonction
$$g : \Gamma_N \to \mathbb{R},$$
on considère le problème aux limites
$$\begin{cases} -\triangle u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \tag{1}$$
où $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ désigne la dérivée normale.

1. Reformulez ce problème sous forme variationnelle.

2. Montrez que si u et v sont deux solutions, alors

$$\int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 = 0,$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne.

3. En déduire que (1) admet toujours au plus une solution.

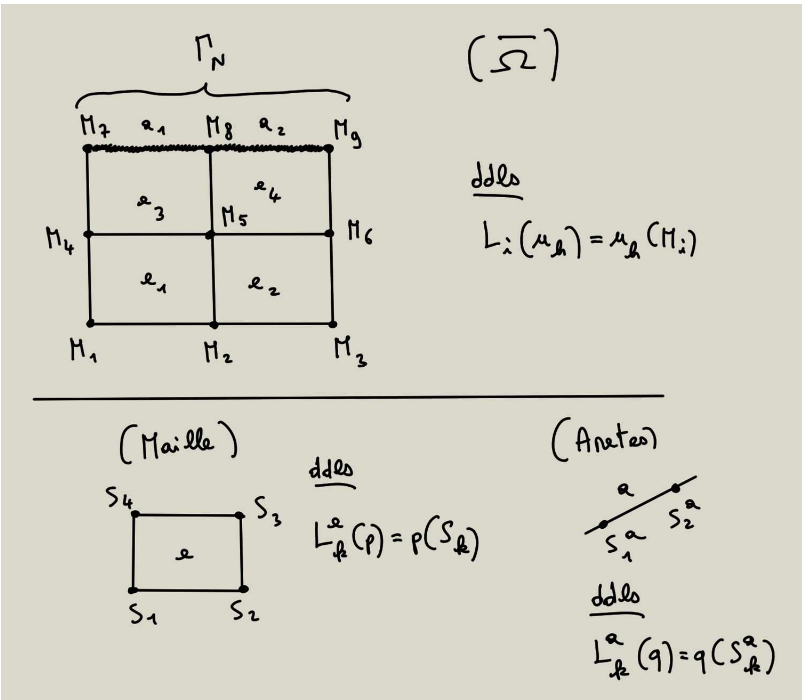
Exercice 3. On reprend l'approximation par éléments finis du problème du cours :

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = \alpha & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + bu = \beta & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases}$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ est la dérivée normale et

$$f \equiv 0, \quad \alpha \equiv 0, \quad b \equiv 1, \quad \beta \equiv 2.$$

On rappelle que $\Omega =]0,1[^2 \subset \mathbb{R}^2$ et que la partition $\{\Gamma_D, \Gamma_N\}$ du bord et le maillage sont comme ci-dessous.



On rappelle qu'on avait les coefficients élémentaires suivants :

$$A^e_{kn} = \frac{|e|}{4} \sum_{i=1}^{4} \nabla N^e_n(S_i) \cdot \nabla N^e_k(S_i),$$

$$A^a_{kn} = \frac{|a|}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F^a_k = \frac{|a|}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

où $|e|$ et $|a|$ désignent respectivement l'aire de e et la longueur de a. Vous trouverez en annexe des programmes pour résoudre le problème approché écrit sous sa forme matricielle

$$AU_h = F.$$

Ils contiennent 5 erreurs. Corrigez les.
Ne justifiez pas vos réponses.

Remarque. *Les "..." en fin de ligne ne sont pas des erreurs. Ils servent à écrire une commande sur plusieurs lignes.*

Corrigé (rapide) de l'examen d'approximation des EDPs de 2016 – 2017

<u>Exercice 1</u>

1) Soit $p \in \mathcal{P}_e$ tel que

$$p(S_1) = p(S_2) = p'(m) = p''(m) = 0.$$

Puisque S_1 et S_2 sont racines et $p \in \mathrm{Vect}\{1, x, x^2, x^3\}$,

$$p(x) = (x - S_1)(x - S_2)(ax + b)$$

pour certaines constantes a et b. Notons

$$q(x) = (x - S_1)(x - S_2).$$

On a $p(x) = q(x)(ax + b)$. Donc

(1) $$p'(x) = q'(x)(ax + b) + a\,q(x)$$

(2) et $$p''(x) = q''(x)(ax + b) + 2a\,q'(x).$$

Or il est facile de voir que

$$q'(m) = 0 \quad \text{et} \quad q(m) = -\frac{(S_2 - S_1)^2}{4} \neq 0.$$

Donc (1) donne :

$$0 = p'(m) = a\,\underbrace{q(m)}_{\neq 0}$$

et on conclut que $a = 0$.

De plus $q''(x) = 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc (2) donne :

$$0 = p''(m) = 2b,$$

ce qui implique que $b = 0$ et termine la preuve (car on vient de montrer que nécessairement p est le polynôme nul).

2) Considérons le système d'inconnue q suivant :

$$(3) \qquad \begin{cases} q \in \mathrm{Vect}\{1, y, y^2, y^3\}, \\ q(0) = q(1) = q'(\tfrac{1}{2}) = 0, \\ q''(\tfrac{1}{2}) = 1. \end{cases}$$

On sait qu'il admet une unique solution, qui est $N_4^{\tilde{e}}$.

Posons maintenant $q(y) = \dfrac{y(y-1)}{2}$. Il suffit donc de montrer que ce q est solution de (3). Mais ceci est évident et la preuve que $N_4^{\tilde{e}}(y) = \dfrac{y(y-1)}{2}$ est finie.

3-4) On a $N_3^{\hat{e}} \in \mathrm{Vect}\{1, y, y^2, y^3\}$ et

$$N_3^{\hat{e}}(0) = N_3^{\hat{e}}(1) = 0.$$

Ceci implique que

$$N_3^{\hat{e}}(y) = \underbrace{y(y-1)}_{\text{noté } q(y)}(ay+b)$$

pour certaines constantes a et b.

D'où

(4) $$(N_3^{\hat{e}})'(y) = q'(y)(ay+b) + a\,q(y)$$

(5) et $$(N_3^{\hat{e}})''(y) = q''(y)(ay+b) + 2a\,q'(y),$$

avec comme tout à l'heure

(6) $$q(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{4}, \qquad q'(\tfrac{1}{2}) = 0 \quad \text{et} \quad q''(\tfrac{1}{2}) = 2$$

(car $q(y) = y(y-1)$).

En utilisant que $(N_3^{\hat{e}})'(\frac{1}{2}) = 1$ et (4), (6), on a

$$1 = -\frac{a}{4}.$$

En utilisant que $(N_3^{\hat{e}})''(\frac{1}{2}) = 0$ et (5), (6), on a

$$0 = 2\left(\frac{a}{2} + b\right).$$

On déduit que $\boxed{a = -4 \quad \text{et} \quad b = 2.}$

5) $F_3^{\hat{e}} = \int_0^1 g(y)\, N_3^{\hat{e}}(y)\, dy$

$$\underset{\text{(Simpson)}}{\simeq} \frac{1}{6}\Big(g(0)\, \underbrace{\cancel{N_3^{\hat{e}}(0)}}_{=0} + 4\, g\big(\tfrac{1}{2}\big)\, \underbrace{N_3^{\hat{e}}\big(\tfrac{1}{2}\big)}_{=\, -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{2}+2\right) \,=\, 0} + g(1)\, \underbrace{\cancel{N_3^{\hat{e}}(1)}}_{=0} \Big)$$

question précédente

donc $\boxed{F_3^{\hat{e}} \simeq 0 .}$

De même, on utilise que

$$N_4^{\hat{e}}(0) = N_4^{\hat{e}}(1) = 0 \quad \text{et} \quad N_4^{\hat{e}}\big(\tfrac{1}{2}\big) \overset{\text{question 2}}{=} -\frac{1}{8}$$

pour voir que $\boxed{F_4^{\hat{e}} \simeq -\dfrac{g(\frac{1}{2})}{12} .}$

6) Considérons le système d'inconnue p suivant :

$$(7) \qquad \begin{cases} p \in \mathrm{Vect}\{1, x, x^2, x^3\}, \\ p(S_1) = p(S_2) = p'(m) = 0, \\ p''(m) = 1 . \end{cases}$$

On sait qu'il admet une unique solution, qui est N_4^{e} (comme à la question 2). Il suffit donc de montrer que le polynôme particulier $p(x) = |e|^2\, N_4^{\hat{e}}\left(\dfrac{x - S_1}{|e|}\right)$ résout (7).

On $p(S_1) = |e|^2 N_4^{\hat{e}}\left(\frac{\overbrace{S_1 - S_1}^{0}}{|e|}\right) = 0$ et de même

$p(S_2) = |e|^2 N_4^{\hat{e}}(1) = 0$. De plus

$$p'(x) = |e| \left(N_4^{\hat{e}}\right)' \left(\frac{x - S_1}{|e|}\right).$$

Donc $p'(m) = |e| \left(N_4^{\hat{e}}\right)'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Et finalement

$$p''(x) = \left(N_4^{\hat{e}}\right)'' \left(\frac{x - S_1}{|e|}\right)$$

donc $p''(m) = \left(N_4^{\hat{e}}\right)''\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Ceci montre la formule

pour N_4^e et on raisonne de même pour N_3^e.

7) $$F_3^e = \int_{S_1}^{S_2} f(x)\, N_3^e(x)\, dx$$

$$= \int_{S_1}^{S_2} f(x)\, N_3^{\hat{e}}\left(\frac{x - S_1}{|e|}\right) |e|\, dx$$

$$= |e|^2 \int_0^1 f(S_1 + |e|\, y)\, N_3^{\hat{e}}(y)\, dy$$

$y = \frac{x - S_1}{|e|}$, $dy = \frac{dx}{|e|}$

ie $\boxed{F_3^e = |e|^2 F_3^{\hat{e}} \text{ avec } g(y) = f(S_1 + |e|\, y).}$

De même $\boxed{F_4^e = |e|^3 F_4^{\hat{e}}.}$

8) D'après les questions précédentes,

$$\boxed{F_3^e = |e|^2 \, F_3^{\hat{e}} \simeq 0}$$

et

$$F_4^e = |e|^3 \, F_4^{\hat{e}} \simeq -\frac{|e|^3}{12} \, g\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$g(y) = f(S_1 + |e| y)$$

d'où

$$\boxed{F_4^e \simeq -\frac{|e|^3}{12} \, f(m) \,.}$$

Exercice 2

1) Notons $V = \{$ fonctions de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R}\}$.

Soit $\phi \in V$ nulle sur Γ_D. Si u résout (1),

$$0 = -\int_\Omega \phi \, \Delta u \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Green - Gauss}}}{=} \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla u - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial u}{\partial \nu}}_{= \underbrace{\cancel{\int_{\Gamma_D}}}_{\substack{= \\ 0 \text{ car } \phi = 0 \\ \text{sur } \Gamma_D}} + \underbrace{\int_{\Gamma_N}}_{\substack{= \text{ Neuman} \\ \int_{\Gamma_N} \phi g}}}$$

d'où

$$\boxed{\underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi}_{\text{noté } a(u,\phi)} = \underbrace{\int_{\Gamma_N} \phi g}_{\text{noté } \ell(\phi)} .}$$

On dit donc que :

Définition

u est solution variationnelle de (1) si

$$\boxed{\begin{cases} u \in V, \\ a(u, \phi) = \ell(\phi) \quad \forall \phi \in V \text{ nulle sur } \Gamma_D, \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D . \end{cases}}$$

2) Prenons $\phi = u - v$. Alors

$$a(u, u-v) - a(v, u-v) = \ell(u-v) - \ell(u-v)$$

$$= 0.$$

D'où $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u-v) - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla(u-v) = 0$

et $\displaystyle\int_\Omega \left|\nabla(u-v)\right|^2 = 0.$

3) On déduit que $\nabla(u-v) = 0$ sur $\overline{\Omega}$ et donc que

$$u - v = \text{Constante sur } \overline{\Omega}.$$

Mais $u - v = 0$ sur $\Gamma_D \neq \phi$ et nécessairement cette constante est nulle.

Exercice 3

Voir les corrections en rouge.

Principal.m

```
% Initialisation et maillage

clear all;
clc;

load Noeuds.dat;
load Elements.dat;
load ID.dat;
load Aretes.dat;

% Assemblage

N=size(Noeuds,1);
A=zeros(N,N);
F=zeros(N,1);

Nelem=size(Elements,1);
N_loc=size(Elements,2);

for e=1:Nelem
    S=Noeuds(Elements(e,:),:);
    [Ae,Fe]=AeFe(S);
    for k=1:N_loc
        i=Elements(e,k);
        F(i)=F(i)+Fe(k);
        for n=1:N_loc
            j=Elements(e,n);
            A(i,j)=A(i,j)+Ae(k,n);
        end
    end
end

CardID=size(ID,1);
for i=1:CardID
    F(i)=0;
    for j=1:N
        A(i,j)=0;
    end
    A(i,i)=1;
end
```

(Ce n'est pas l'indice de I_D)

Remplacer par : for temp = 1: Card ID

i = ID(temp);

(c'est l'indice de I_D)

```
Naretes=size(Aretes,1);
N_loc=size(Aretes,2);

for a=1:Naretes
    S=Noeuds(Aretes(a,:),:);
    [Aa,Fa]=AaFa(S);
    for k=1:N_loc
        i=Aretes(a,k);
        F(i)=F(i)+Fa(k);
        for n=1:N_loc
            j=Aretes(a,n);
            A(i,j)=A(i,j)+Aa(k,n);
        end
    end
end
```

Cette boucle doit être avant celle de Dirichlet, sinon cela modifiera à nouveau les lignes de I_D. (Si vous ne savez pas pourquoi, vérifiez le sur matlab !)

```
% Resolution

Uh=A\F;
```

AeFe.m

```
function [Ae,Fe]=AeFe(S)

% matrice de passage

M=[1 1 1 1;...
    S(1,1) S(2,1) S(3,1) S(4,1);...
    S(1,2) S(2,2) S(3,2) S(4,2);...
    S(1,1)*S(1,2) S(2,1)*S(2,2) S(3,1)*S(3,2) S(4,1)*S(4,2)];

% aire de la maille

h1=norm(S(2,:)-S(1,:));
h2=norm(S(4,:)-S(1,:));
aire=h1*h2;

% second membre

Fe=zeros(4,1);

% matrice

Ae=zeros(4,4);
```

Rajoutez : x1=S(i,1);
x2=S(i,2);

```
for i=1:4

    % derivees des fonctions d'interpolation

    dNcdx1=[0;1;0;x2];
    dNedx1=M\dNcdx1;
    dNcdx2=[0;0;1;x1];
    dNedx2=M\dNcdx2;

    % integration
```

Rajoutez : Ae(k,n) +

```
        for k=1:4
            for n=1:4
                    Ae(k,n)=...
                        (aire/4)*(dNedx1(n)*dNedx1(k)+dNedx2(n)*dNedx2(k));
            end
        end
end
```

AaFa.m

```
function [Aa,Fa]=AaFa(S)

% longueur de l'arete

h=norm(S(2,:)-S(1,:));

% second membre et matrice

Fa=(h/2)*[2;2];
Aa=(h/2)*[1 0;0 1];
```

Noeuds.dat

```
0.000000 0.000000
0.500000 0.000000
1.000000 0.000000
0.000000 0.500000
0.500000 0.500000
1.000000 0.500000
0.000000 1.000000
0.500000 1.000000
1.000000 1.000000
```

Elements.dat

```
1 2 5 4
2 3 6 5
4 5 8 7
5 6 9 8
```

Aretes.dat

```
7 8
8 9
```

ID.dat

```
1
2
3
4
6
7
9
```