Équations différentielles et modélisation

Carlotta Donadello

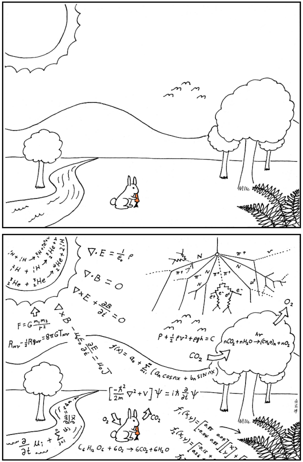
Université de Franche–Comté

9 avril 2015

Section 1

Physique et mathématique

Physique et mathématique



This is how scientists see the world.

La philosophie est écrite dans ce vaste livre constamment ouvert devant nos yeux (je veux dire l'univers), et on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend à connaître la langue et les caractères dans lesquels il est écrit. Or il est écrit en langue mathématique, et ses caractères son le triangle et le cercle et autres figures géométriques, sans lesquelles il est humainement impossible d'en comprendre un mot.

Galilée, Il Saggiatore. Voir la trad. C. Chauviré, L'Essayeur, Paris, Les Belles Lettres, 1979, p. 141

Section 2

Lois de conservation en physique

Le problème de la baignoire

Le Guichet du Savoir

question ? réponse !

en 72 h max

Poser une question

Des bibliothécaires vous répondent en 72h maximum.

je pose ma question

Chercher une réponse

chercher

recherche multi-critères

Comment ça marche

Quelles questions ?
Qui répond ?
Dans quel délai ? tout savoir

Accueil > Le problème des baignoires qui fuient...

Le problème des baignoires qui fuient...

par Bizbille, le 25/02/2006 à 22:52 - 3936 visites

Bonjour,

Cela fait des années que je n'ai pas pratiqué sérieusement les mathématiques malgré mon goût pour cette discipline, et il y a de nombreuses choses que j'ai oublié. L'une d'elle est la manière de résoudre le classique problème des baignoires qui fuient, que je n'arrive pas à retrouver par moi-même.

Par exemple: étant donné une baignoire de 50L, un robinet qui coule à un débit de 5L/minute. En sachant que la baignoire a une fuite et que l'eau s'échappe à un débit de 5dL/minute, en combien de temps la baignoire sera-t-elle remplie? (Les chiffres sont choisis au "pif".)

Quelles sont les étapes à suivre pour résoudre ce genre de problème mathématique?

D'avance merci pour vos lumières.

Nuage de mots-clefs

activité culture enfants europe famille formation guerre histoire hommes janvier langue lecture maison ministère national nature origine politique pourrait pouvoir pratique public publique raison région services situation société système travail

Rester connecté

guichetdusavoir.org sur Facebook J'aime 1k

guichetdusavoir.org sur Twitter Suivre

s'abonner aux flux RSS

Idée :

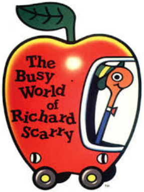
La variation de la quantité d'eau dans la baignoire dans le temps ne dépend que des flux d'eau en entrée (robinets) et en sortie (fuite, déversement).

$$\frac{V(t) - V(0)}{t} = \text{ Débit des robinets } - \text{ Débit des fuites } .$$

Ce même principe s'applique à la variation de toutes les grandeurs physiques extensives

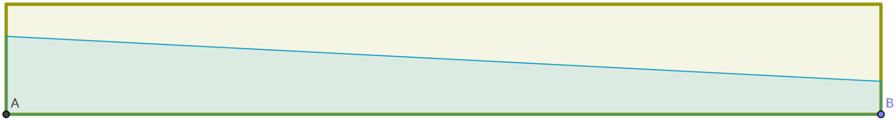
- la masse ;
- le nombre de particules ;
- le moment ;
- l'énergie.

Dans la baignoire d'Asticot

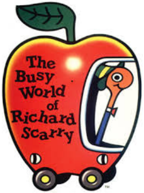


- Le fond de la baignoire a une seule dimension d'espace ;
- Le robinet est au point $x = a$, la fuite au point $x = b$;

- On appelle u la quantité d'eau par unité de longueur ;
- u dépend de la position et du temps : $u = u(x, t)$;
- La quantité d'eau dans la baignoire à l'instant t est $\int_a^b u(x,t)\, dx$;
- Le flot dépend de u.



Dans la baignoire d'Asticot



- Le fond de la baignoire a une seule dimension d'espace ;
- Le robinet est au point $x = a$, la fuite au point $x = b$;

- On appelle u la quantité d'eau par unité de longueur ;
- u dépend de la position et du temps : $u = u(x, t)$;
- La quantité d'eau dans la baignoire à l'instant t est $\displaystyle\int_a^b u(x,t)\,dx$;
- Le flot dépend de u.

Formellement :

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = f\left(u(a,t)\right) - f\left(u(b,t)\right). \qquad (1)$$

Une loi de conservation scalaire

à une variable d'espace

L'évolution en chaque point est donnée par l'équation

$$\frac{d}{dt}u + \frac{d}{dx}f(u) = 0, \qquad u : \text{quantité conservée}, \qquad f : \text{flux}. \tag{2}$$

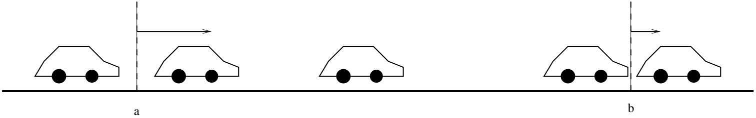
$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(t,x)\,dx = -\int_a^b f\left(u(t,x)\right)_x\,dx = f\left(u(t,a)\right) - f\left(u(t,b)\right). \tag{3}$$

Section 3

Un exemple

Le trafic routier

Soit $\mathfrak{u}$ la densité de véhicules sur une route.

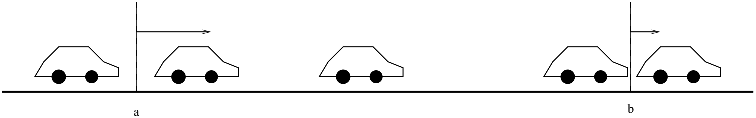


$$\frac{d}{dt}\int_a^b \mathfrak{u}(x,t)\,dx =$$

[flux d'autos en entrée en a] $-$ [flux d'autos en sortie en b].

Comment décrire le flux ?

Le trafic routier

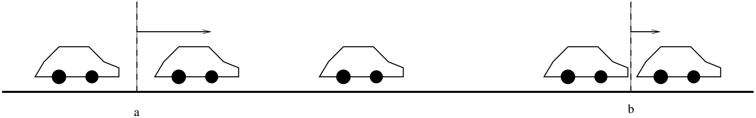


Flux au point x

$=$ [nombre de voitures qui passent par x par unité de temps]

$=$ [densité , u] $\times$ [vitesse, v].

Le trafic routier



Flux au point x

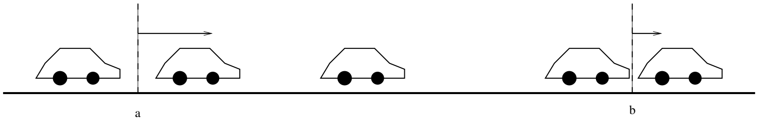
$= $ [nombre de voitures qui passent par x par unité de temps]

$= $ [densité , $\mathfrak{u}$] $\times$ [vitesse, v].

La vitesse peut être une fonction connue *a priori*.

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{u} + \frac{d}{dx}\left(v(x,t)\mathfrak{u}\right) = 0. \qquad (4)$$

Le trafic routier



La vitesse peut dépendre de la densité de véhicules sur la route.
On a alors une ♡ loi de conservation non-linéaire ♡
Exemple : Le modèle Lighthill-Whitham-Richards (LWR)

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{u} + \frac{d}{dx}\left(\mathfrak{u}(R-\mathfrak{u})\right) = 0, \qquad R > 0.$$

Section 4

Solutions (?)

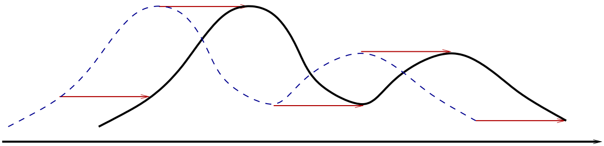
Équation du transport

Flux affine

Si $f(u) = Au$ alors $\frac{d}{dx} f(u(x,t)) = A \frac{d}{dx} u(x,t)$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u + A \frac{d}{dx} u = 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

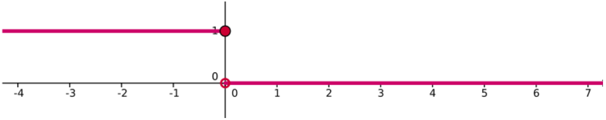
Solution : $u(x,t) = u_0(x - At)$.



Équation du transport

Flux affine

Soit $A = 4$.
Soit $u_0(x) = 1$ si $x \leq 0$ et $u_0(x) = 0$ si $x > 0$.



- Est-il vrai que la fonction $u(x,t) = u_0(x - 4t)$ est une solution de l'équation différentielle ?

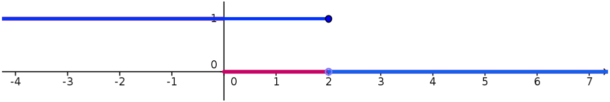


FIGURE: Le profil de $u(x, 1/2)$

- Peut-on imaginer une situation physique décrite par cette fonction ?