D'Alembert, un mathématicien du siècle des Lumières

Cyril Godey

Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Lycée Victor Hugo
12 mars 2015

UFC
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

Jean Le Rond D'Alembert en 1753

- Naît le 16 novembre 1717 à Paris.

- Naît le 16 novembre 1717 à Paris.
- Fils illégitime de Madame de Tencin et du chevalier Destouches.

- Naît le 16 novembre 1717 à Paris.
- Fils illégitime de Madame de Tencin et du chevalier Destouches.

- Abandonné devant l'église Saint-Jean-Le Rond.

- Naît le 16 novembre 1717 à Paris.
- Fils illégitime de Madame de Tencin et du chevalier Destouches.

- Abandonné devant l'église Saint-Jean-Le Rond.
- Confié à une nourrice, Mme Rousseau.

Ses études

- 1730–1735 : études au collège des Quatre-Nations à Paris (actuel Institut de France).

Ses études

- 1730–1735 : études au collège des Quatre-Nations à Paris (actuel Institut de France).

- Obtient un Baccalauréat ès Arts en 1735, puis débute des études de droit et de médecine. Se fait appeler Daremberg.

Ses études

- 1730–1735 : études au collège des Quatre-Nations à Paris (actuel Institut de France).

- Obtient un Baccalauréat ès Arts en 1735, puis débute des études de droit et de médecine. Se fait appeler Daremberg.
- Commence l'étude des mathématiques en autodidacte.

Premiers travaux scientifiques

- Devient membre de l'Académie royale des Sciences en 1741 en tant qu'« adjoint astronome ».

Premiers travaux scientifiques

- Devient membre de l'Académie royale des Sciences en 1741 en tant qu'« adjoint astronome ».
- Publie en 1743 le *Traité de dynamique*.

Daniel Bernoulli

Leonhard Euler

Premiers travaux scientifiques

- Devient membre de l'Académie royale des Sciences en 1741 en tant qu'« adjoint astronome ».
- Publie en 1743 le *Traité de dynamique*.

Daniel Bernoulli

Leonhard Euler

- Entre à l'Académie de Berlin en 1748 et débute une correspondance avec Euler.

Un homme de lettres

- Fréquente les salons littéraires parisiens.

Denis Diderot

Voltaire

Un homme de lettres

- Fréquente les salons littéraires parisiens.

Denis Diderot

Voltaire

- 1746–1757 : dirige avec Diderot la rédaction de l'*Encyclopédie*.

Un homme de lettres

- Fréquente les salons littéraires parisiens.

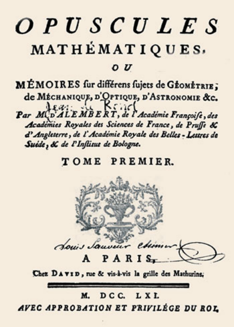
Denis Diderot

Voltaire

- 1746–1757 : dirige avec Diderot la rédaction de l'*Encyclopédie*.
- Élu à l'Académie française en 1754.

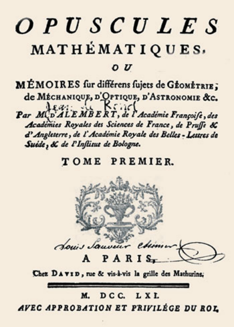
Après l'*Encyclopédie*

- Poursuit ses travaux scientifiques en mathématiques et en physique, rassemblés dans ses *Opuscules mathématiques*.


OPUSCULES
MATHÉMATIQUES,
OU
MÉMOIRES sur différens sujets de GÉOMÉTRIE, de MÉCHANIQUE, D'OPTIQUE, D'ASTRONOMIE &c.
Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Françoise, des Académies Royales des Sciences de France, de Prusse & d'Angleterre, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suéde, & de l'Institut de Bologne.
TOME PREMIER.
A PARIS,
Chez DAVID, rue & vis-à-vis la grille des Mathurins.
M. DCC. LXI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

Après l'*Encyclopédie*

- Poursuit ses travaux scientifiques en mathématiques et en physique, rassemblés dans ses *Opuscules mathématiques*.

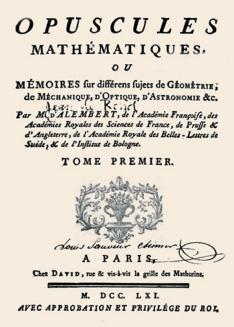


OPUSCULES
MATHÉMATIQUES,
OU
MÉMOIRES sur différens sujets de GÉOMÉTRIE, de MÉCHANIQUE, D'OPTIQUE, D'ASTRONOMIE &c.
Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Françoise, des Académies Royales des Sciences de France, de Prusse & d'Angleterre, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suéde, & de l'Institut de Bologne.
TOME PREMIER.
A PARIS,
Chez DAVID, rue & vis-à-vis la grille des Mathurins.
M. DCC. LXI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

- Secrétaire de l'Académie française en 1772.

Après l'*Encyclopédie*

- Poursuit ses travaux scientifiques en mathématiques et en physique, rassemblés dans ses *Opuscules mathématiques*.



OPUSCULES
MATHÉMATIQUES,
OU
MÉMOIRES sur différens sujets de GÉOMÉTRIE, de MÉCHANIQUE, D'OPTIQUE, D'ASTRONOMIE &c.
Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Françoise, des Académies Royales des Sciences de France, de Prusse & d'Angleterre, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suéde, & de l'Institut de Bologne.
TOME PREMIER.
A PARIS,
Chez DAVID, rue & vis-à-vis la grille des Mathurins.
M. DCC. LXI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

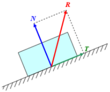
- Secrétaire de l'Académie française en 1772.
- Meurt à Paris le 29 octobre 1783.

L'oeuvre de D'Alembert


ENCYCLOPÉDIE,
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS,
PAR UNE SOCIETÉ DE GENS DE LETTRES.
Mis en ordre & publié par M. DIDEROT, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Prusse; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Françoise, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, de la Société Royale de Londres, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suede, & de l'Institut de Bologne.
Tantùm series juncturaque pollet, Tantùm de medio sumptis accedit honoris! HORAT.
TOME SIXIEME.
A PARIS,
Chez BRIASSON, rue Saint Jacques, à la Science. DAVID l'aîné, rue & vis-à-vis la Grille des Mathurins. LE BRETON, Imprimeur ordinaire du Roy, rue de la Harpe. DURAND, rue du Foin, vis-à-vis la petite Porte des Mathurins.
M. DCC. LVI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

L'*Encyclopédie*

Le problème des cordes vibrantes



Dynamique

Mécanique des fluides

Optique

Astronomie

L'*Encyclopédie*

- Inspirée par la *Cyclopaedia* de Chambers (1728).

L'*Encyclopédie*

- Inspirée par la *Cyclopaedia* de Chambers (1728).
- But : publier une synthèse des connaissances de l'époque.

L'*Encyclopédie*

- Inspirée par la *Cyclopaedia* de Chambers (1728).
- But : publier une synthèse des connaissances de l'époque.
- « L'ouvrage [...] a deux objets : comme encyclopédie, il doit exposer autant qu'il est possible, **l'ordre et l'enchaînement des connaissances humaines** : comme dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers , il doit contenir **sur chaque science et sur chaque art** [...] **les principes généraux qui en sont la base,** et les détails les plus essentiels, qui en font le corps et la substance. »

Discours préliminaire à l'Encyclopédie

L'*Encyclopédie*

- 35 volumes paraissent de 1751 à 1765 sous la direction de Diderot et D'Alembert.


ENCYCLOPÉDIE,
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS,
PAR UNE SOCIETÉ DE GENS DE LETTRES.

Mis en ordre & publié par M. *DIDEROT*, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Prusse; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. *D'ALEMBERT*, de l'Académie Françoise, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, de la Société Royale de Londres, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suede, & de l'Institut de Bologne.

Tantùm series juncturaque pollet,
Tantùm de medio sumptis accedit honoris! HORAT.

TOME SIXIEME.

A PARIS,
Chez
BRIASSON, *rue Saint Jacques, à la Science.*
DAVID l'aîné, *rue & vis-à-vis la Grille des Mathurins.*
LE BRETON, Imprimeur ordinaire du Roy, *rue de la Harpe.*
DURAND, *rue du Foin, vis-à-vis la petite Porte des Mathurins.*

M. DCC. LVI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

L'*Encyclopédie*

- 35 volumes paraissent de 1751 à 1765 sous la direction de Diderot et D'Alembert.

ENCYCLOPÉDIE,
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS,
PAR UNE SOCIETÉ DE GENS DE LETTRES.

Mis en ordre & publié par M. DIDEROT, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Prusse; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Françoise, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, de la Société Royale de Londres, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suede, & de l'Institut de Bologne.

Tantùm series juncturaque pollet,
Tantùm de medio sumptis accedit honoris! HORAT.

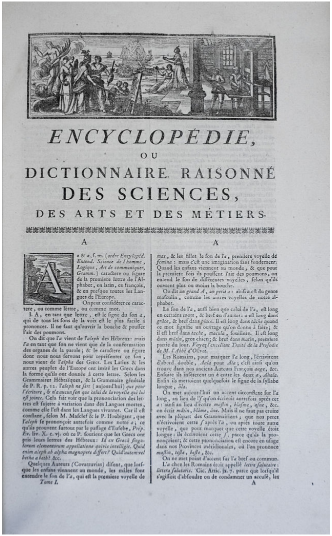
TOME SIXIEME.

A PARIS,
Chez BRIASSON, *rue Saint Jacques, à la Science.*
DAVID l'aîné, *rue & vis-à-vis la Grille des Mathurins.*
LE BRETON, Imprimeur ordinaire du Roy, *rue de la Harpe.*
DURAND, *rue du Foin, vis-à-vis la petite Porte des Mathurins.*

M. DCC. LVI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

- Plus de 200 collaborateurs participent à la rédaction.

L'*Encyclopédie*



ENCYCLOPÉDIE,

OU

DICTIONNAIRE RAISONNÉ

DES SCIENCES,

DES ARTS ET DES MÉTIERS.

A

A a & *a*, f. m. (*ordre Encyclopéd. Entend. Science de l'homme*, *Logique*, *Art de communiquer*, *Gramm.*) caractere ou figure de la premiere lettre de l'Alphabet, en latin, en françois, & en prefque toutes les Langues de l'Europe.

On peut confidérer ce caractere, ou comme lettre, ou comme mot.

I. A, en tant que lettre, eft le figne du fon *a*, qui de tous les fons de la voix eft le plus facile à prononcer. Il ne faut qu'ouvrir la bouche & pouffer l'air des poumons.

On dit que l'*a* vient de l'*aleph* des Hébreux: mais l'*a* en tant que fon ne vient que de la conformation des organes de la parole; & le caractere ou figure dont nous nous fervons pour repréfenter ce fon, nous vient de l'*alpha* des Grecs. Les Latins & les autres peuples de l'Europe ont imité les Grecs dans la forme qu'ils ont donnée à cette lettre. Selon les Grammaires Hébraïques, & la Grammaire générale de P. R. p. 12. l'*aleph ne fert* (aujourd'hui) *que pour l'écriture*, *& n'a aucun fon que celui de la voyelle qui lui eft jointe.* Cela fait voir que la prononciation des lettres eft fujette à variation dans des Langues mortes, comme elle l'eft dans les Langues vivantes. Car il eft conftant, felon M. Mafclef & le P. Houbigant, que l'*aleph* fe prononçoit autrefois comme notre *a*; ce qu'ils prouvent furtout par le paffage d'Eufebe, *Prép. Ev.* liv. X. c. vj. où ce P. foutient que les Grecs ont pris leurs lettres des Hébreux: *Id ex Græcâ fingulorum elementorum appellatione quivis intelligit. Quid enim aleph ab alpha magnopere differt? Quid autem vel betha a beth?* &c.

Quelques Auteurs (Covarruvias) difent, que lorfque les enfans viennent au monde, les mâles font entendre le fon de l'*a*, qui eft la premiere voyelle de

Tome I.

mas, & les filles le fon de l'*e*, premiere voyelle de *femina*: mais c'eft une imagination fans fondement. Quand les enfans viennent au monde, & que pour la premiere fois ils pouffent l'air des poumons, on entend le fon de différentes voyelles, felon qu'ils ouvrent plus ou moins la bouche.

On dit *un grand A*, *un petit a*: ainfi *a* eft du genre mafculin, comme les autres voyelles de notre alphabet.

Le fon de l'*a*, auffi bien que celui de l'*e*, eft long en certains mots, & bref en d'autres: *a* eft long dans *grâce*, & bref dans *place*. Il eft long dans *tâche* quand ce mot fignifie un ouvrage qu'on donne à faire; & il eft bref dans *tache*, *macula*, fouillure. Il eft long dans *mâtin*, gros chien; & bref dans *matin*, premiere partie du jour. *Voyez l'excellent Traité de la Profodie de M. l'Abbé d'Olivet.*

Les Romains, pour marquer l'*a* long, l'écrivirent d'abord double, *Aala* pour *Ala*; c'eft ainfi qu'on trouve dans nos anciens Auteurs François *aage*, &c. Enfuite ils inférerent un *h* entre les deux *a*, *Ahala*. Enfin ils mettoient quelquefois le figne de la fyllabe longue, *āla*.

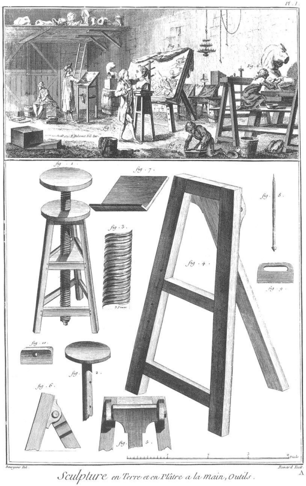
On met aujourd'hui un accent circonflexe fur l'*a* long, au lieu de l'*f* qu'on écrivoit autrefois après cet *a*: ainfi au lieu d'écrire *maftin*, *blafme*, *afne*, &c. on écrit *mâtin*, *blâme*, *âne*. Mais il ne faut pas croire avec la plûpart des Grammairiens, que nos peres n'écrivoient cette *f* après l'*a*, ou après toute autre voyelle, que pour marquer que cette voyelle étoit longue: ils écrivoient cette *f*, parce qu'ils la prononçoient; & cette prononciation eft encore en ufage dans nos Provinces méridionales, où l'on prononce *maftin*, *tefte*, *befte*, &c.

On ne met point d'accent fur l'*a* bref ou commun.

L'*a* chez les Romains étoit appellé *lettre falutaire*: *littera falutaris*. Cic. Attic. jx. 7. parce que lorfqu'il s'agiffoit d'abfoudre ou de condamner un accufé, les

A

L'*Encyclopédie*



Une planche de l'*Encyclopédie*

L'*Encyclopédie*

- D'Alembert rédige plus de 1700 articles, essentiellement des articles scientifiques.

FONCTION, f. f. (*Analyfe.*) Les anciens géomètres, ou plutôt les anciens analyftes ont appellé *fonctions* d'une quantité quelconque x les différentes *puiffances* de cette quantité (*voy.* PUISSANCE); mais aujourd'hui on appelle *fonction* de x, ou en général d'une quantité quelconque, une quantité compofée de tant de termes qu'on voudra & dans laquelle x fe trouve d'une manière quelconque, mêlée, ou non, avec des conftantes; ainfi, $x^2 + x^3$, $\sqrt{aa + xx}$, $\sqrt{\frac{aa + x^3}{bb + x^4}}$, $\int dx \sqrt{a^2 - x^2}$, *&c.* font des fonctions de x.

De même $x^2 y + ay^3$, *&c.* eft une fonction de x & de y, ainfi des autres.

Tous les termes d'une *fonction* de x font cenfés avoir la même *dimenfion*; quand ils ne l'ont pas, c'eft qu'il y a une conftante foufentendue qu'on prend pour l'unité: ainfi, dans $x^2 + x^3$, on doit regarder x^2 comme égale à ax^2, a étant l'unité.

Quand la *fonction* n'eft ni fraction ni radical, fa dimenfion eft égale à celle d'un de fes termes. Ainfi, la *fonction* $x^2 + x^3$ eft de trois dimenfions.

Quand la *fonction* eft une fraction, la dimenfion eft égale à celle du numérateur moins celle du dénominateur. Ainfi, $\frac{a^3 + x^3}{a^2 + x^2}$ eft de dimenfion 1, $\frac{a^2 + x^2}{a^3 + x^3}$ eft de dimenfion -1, & $\frac{aa + xx}{aa - xx}$ eft de *dimenfion nulle*. *V.* TAUTOCHRONE & INTÉGRAL.

Quand la *fonction* eft radicale, fa dimenfion eft égale à celle de la quantité qui eft fous le figne, divifée par l'expofant du radical; ainfi, $\sqrt{aa + xx}$ eft d'une dimenfion, $x\sqrt{aa + xx}$ & $\int dx \sqrt[3]{aa + x^2}$ font de $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ dimenfions, *&c.* & ainfi des autres.

Fonction homogène eft une *fonction* de deux ou plufieurs variables, x, y, &c. dans laquelle la fomme des dimenfions de x, y, &c. eft la même.

Ainfi, $x^2 y + ax^3 + by^3$ eft une *fonction* homogène; il en eft de même de $\sqrt{(axx + \frac{by^3}{x} + \frac{cx^4}{xx + yy})}$, &c. *V.* HOMOGÈNE & INTÉGRAL.

Fonctions femblables font celles dans lefquelles les variables & les conftantes entrent de la même manière; ainfi, $aa + xx$ & $AA + XX$ font des *fonctions* femblables des conftantes a, A, & des variables x, X. (*O*)

L'*Encyclopédie*

- D'Alembert rédige plus de 1700 articles, essentiellement des articles scientifiques.

FONCTION, ſ. f. (*Analyſe.*) Les anciens géomètres, ou plutôt les anciens analyſtes ont appellé *fonctions* d'une quantité quelconque x les différentes *puiſſances* de cette quantité (*voy.* PUISSANCE); mais aujourd'hui on appelle *fonction* de x, ou en général d'une quantité quelconque, une quantité compoſée de tant de termes qu'on voudra & dans laquelle x ſe trouve d'une manière quelconque, mêlée, ou non, avec des conſtantes; ainſi, $x^2 + x^3$, $\sqrt{aa + xx}$, $\sqrt{\frac{aa+x^3}{bb+x^4}}$, $\int dx \sqrt{a^2 - x^2}$, &c. ſont des fonctions de x.

De même $x^2 y + ay^3$, &c. eſt une fonction de x & de y, ainſi des autres.

Tous les termes d'une *fonction* de x ſont cenſés avoir la même *dimenſion*; quand ils ne l'ont pas, c'eſt qu'il y a une conſtante ſouſentendue qu'on prend pour l'unité: ainſi, dans $x^2 + x^3$, on doit regarder x^2 comme égale à ax^2, a étant l'unité.

Quand la *fonction* n'eſt ni fraction ni radical, ſa dimenſion eſt égale à celle d'un de ſes termes. Ainſi, la *fonction* $x^2 + x^3$ eſt de trois dimenſions.

Quand la *fonction* eſt une fraction, la dimenſion eſt égale à celle du numérateur moins celle du dénominateur. Ainſi, $\frac{a^3 + x^3}{a^2 + x^2}$ eſt de dimenſion 1, $\frac{a^2 + x^2}{a^3 + x^3}$ eſt de dimenſion -1, & $\frac{aa + xx}{aa - xx}$ eſt de *dimenſion nulle*. *V.* TAUTOCHRONE & INTÉGRAL.

Quand la *fonction* eſt radicale, ſa dimenſion eſt égale à celle de la quantité qui eſt ſous le ſigne, diviſée par l'expoſant du radical; ainſi, $\sqrt{aa+xx}$ eſt d'une dimenſion, $x\sqrt{aa + xx}$ & $\int dx \sqrt[3]{aa + x^2}$ ſont de $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ dimenſions, &c. & ainſi des autres.

Fonction homogène eſt une *fonction* de deux ou pluſieurs variables, x, y, &c. dans laquelle la ſomme des dimenſions de x, y, &c. eſt la même.

Ainſi, $x^2 y + ax^3 + by^3$ eſt une *fonction* homogène; il en eſt de même de $\sqrt{\left(axx + \frac{by^3}{x} + \frac{cx^4}{xx+yy}\right)}$, &c. *V.* HOMOGÈNE & INTÉGRAL.

Fonctions ſemblables ſont celles dans leſquelles les variables & les conſtantes entrent de la même manière; ainſi, $aa + xx$ & $AA + XX$ ſont des *fonctions* ſemblables des conſtantes a, A, & des variables x, X. (*O*)

- D'Alembert fait ainsi connaître certains de ses travaux...

L'*Encyclopédie*

- D'Alembert rédige plus de 1700 articles, essentiellement des articles scientifiques.

FONCTION, ſ. f. (*Analyſe.*) Les anciens géomètres, ou plutôt les anciens analyſtes ont appellé *fonctions* d'une quantité quelconque x les différentes *puiſſances* de cette quantité (*voy.* PUISSANCE); mais aujourd'hui on appelle *fonction* de x, ou en général d'une quantité quelconque, une quantité composée de tant de termes qu'on voudra & dans laquelle x ſe trouve d'une manière quelconque, mêlée, ou non, avec des conſtantes; ainſi, x^2+x^3, $\sqrt{aa+xx}$, $\sqrt{\frac{aa+x^3}{bb+x^4}}$, $\int dx\sqrt{a^2-x^2}$, *&c.* ſont des fonctions de x.

De même x^2y+ay^3, *&c.* eſt une fonction de x & de y, ainſi des autres.

Tous les termes d'une *fonction* de x ſont cenſés avoir la même *dimenſion*; quand ils ne l'ont pas, c'eſt qu'il y a une conſtante ſouſentendue qu'on prend pour l'unité : ainſi, dans x^2+x^3, on doit regarder x^2 comme égale à ax^2, a étant l'unité.

Quand la *fonction* n'eſt ni fraction ni radical, ſa dimenſion eſt égale à celle d'un de ſes termes. Ainſi, la *fonction* x^2+x^3 eſt de trois dimenſions.

Quand la *fonction* eſt une fraction, la dimenſion eſt égale à celle du numérateur moins celle du dénominateur. Ainſi, $\frac{a^3+x^3}{a^2+x^2}$ eſt de dimenſion 1, $\frac{a^2+x^2}{a^3+x^3}$ eſt de dimenſion -1, & $\frac{aa+xx}{aa-xx}$ eſt de *dimenſion nulle*. *V.* TAUTOCHRONE & INTÉGRAL.

Quand la *fonction* eſt radicale, ſa dimenſion eſt égale à celle de la quantité qui eſt ſous le ſigne, diviſée par l'expoſant du radical; ainſi, $\sqrt{aa+xx}$ eſt d'une dimenſion, $x\sqrt{aa+xx}$ & $\int dx\sqrt[3]{aa+x^2}$ ſont de $1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ dimenſions, *&c.* & ainſi des autres.

Fonction homogène eſt une *fonction* de deux ou pluſieurs variables, x, y, &c. dans laquelle la ſomme des dimenſions de x, y, &c. eſt la même.

Ainſi, $x^2y+ax^3+by^3$ eſt une *fonction* homogène; il en eſt de même de $\sqrt{(axx+\frac{by^3}{x}+\frac{cx^4}{xx+yy})}$, &c. *V.* HOMOGÈNE & INTÉGRAL.

Fonctions ſemblables ſont celles dans leſquelles les variables & les conſtantes entrent de la même manière; ainſi, $aa+xx$ & $AA+XX$ ſont des *fonctions* ſemblables des conſtantes a, A, & des variables x, X. (*O*)

- D'Alembert fait ainsi connaître certains de ses travaux... et règle ses comptes !

L'*Encyclopédie*

Quelques amabilités extraites de l'article *Hydrodynamique* :

- « J'y examine les théories données par M. Bernoulli & par M. Maclaurin, & je crois y avoir montré des difficultés & de l'obscurité. »

L'*Encyclopédie*

Quelques amabilités extraites de l'article *Hydrodynamique* :

- « J'y examine les théories données par M. Bernoulli & par M. Maclaurin, & je crois y avoir montré des difficultés & de l'obscurité. »
- « M. Euler [...] a donné une méthode [...] pour déterminer le mouvement des fluides, & paroît faire entendre que la mienne n'est pas générale. Je crois qu'il se trompe sur ce point. »

L'*Encyclopédie*

Quelques amabilités extraites de l'article *Hydrodynamique* :

- « J'y examine les théories données par M. Bernoulli & par M. Maclaurin, & je crois y avoir montré des difficultés & de l'obscurité. »
- « M. Euler [...] a donné une méthode [...] pour déterminer le mouvement des fluides, & paroît faire entendre que la mienne n'est pas générale. Je crois qu'il se trompe sur ce point. »
- « Il me semble que M. Euler auroit dû rendre plus de justice à mon travail sur ce sujet, & convenir de l'utilité qu'il en avoit tirée. »

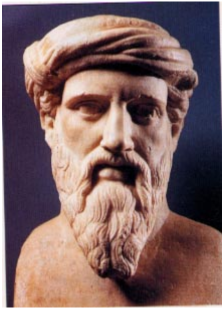
Le problème des cordes vibrantes

- Comment modéliser les vibrations d'une corde de guitare ?

Le problème des cordes vibrantes

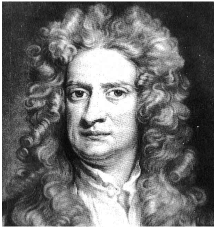
- Comment modéliser les vibrations d'une corde de guitare ?
- Cette question a mobilisé les mathématiciens de l'Antiquité… jusqu'au XX^{e} siècle !

Le problème des cordes vibrantes



Pythagore (VI^{e} siècle av. J. C.) donne une relation entre la longueur d'une corde pincée et la hauteur du son émis.

Le problème des cordes vibrantes



Isaac Newton (1642–1727)

G. W. Leibniz (1646–1716)

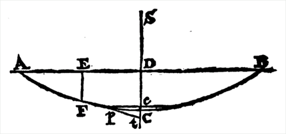
Il faudra attendre le développement du calcul infinitésimal de Newton et Leibniz pour obtenir de nouveaux résultats.

Le problème des cordes vibrantes

- Brook Taylor (1685–1731) s'intéresse à ce problème en 1715, en s'inspirant des travaux de Newton et Leibniz.

Le problème des cordes vibrantes

- Brook Taylor (1685–1731) s'intéresse à ce problème en 1715, en s'inspirant des travaux de Newton et Leibniz.
- Il pense que la forme de la corde en vibration est une sinusoïde.



Le problème des cordes vibrantes

- Euler s'intéresse à cette question vers 1730, et abandonne face aux difficultés rencontrées.

Le problème des cordes vibrantes

- Euler s'intéresse à cette question vers 1730, et abandonne face aux difficultés rencontrées.
- D'Alembert utilise une nouvelle approche, et apporte une réponse décisive en 1747 dans son mémoire *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*.

Le problème des cordes vibrantes

RECHERCHES SUR LA COURBE QUE FORME UNE CORDE TENDUË MISE EN VIBRATION,

PAR MR. D'ALEMBERT.

I.

Je me propoſe de faire voir dans ce Memoire, qu'il y a une infinité d'autres courbes que *la Compagne de la Cycloide allongée*, qui ſatisfont au Probleme dont il s'agit. Je ſuppoſeray toujours 1mo, que les excurſions ou vibrations de la corde ſont fort petites, enſorte que les arcs A M de la courbe qu'elle forme, puiſſent toujours être ſuppoſés ſenſiblement égaux aux abſciſſes correſpondantes A P. 2o. que la corde eſt uniformement epaiſſe dans toute ſa longueur: 3o. que la force F de la tenſion eſt au poids de la corde, en raiſon conſtante, c. a. d. comme m à 1; d'où il s'enſuit que ſi on nomme p la gravité, & l la longueur de la corde, on pourra ſuppoſer $F = pml$; 4o. que ſi on nomme A P ou A M, s; P M, y; & qu'on faſſe ds conſtante, la force acceleratrice du point M ſuivant M P, eſt $-\frac{F\,ddy}{ds^2}$, ſi la courbe eſt concave vers A C, ou $\frac{F\,ddy}{ds^2}$ ſi elle eſt convexe. *Voyez Taylor Meth. Incr.*

Fig. 1.

II. Cela

215

II. Cela poſé, imaginons que Mm, mn, ſoyent deux côtés conſecutifs de la courbe dans un inſtant quelconque, & que $Pp = p\pi$, c. à. d. que ds ſoit conſtant. Soit t le tems écoulé depuis que la corde a commencé à entrer en vibration: il eſt certain que l'ordonnée P M ne peut etre exprimée que par une fonction du tems t, & de l'abſciſſe ou de l'arc correſpondant s ou A P. Soit donc $PM = \varphi(t, s,)$ c. à. d. egale à une fonction inconnuë de t, & de s; on fera $d[\varphi(t, s,)] = p\,dt + q\,ds$, p, & q etant pareillement des fonctions inconnuës de t & de s; or il eſt evident par le Theor. de Mr. Euler, Tom. VII. des Mem. de Petersb. p. 177, que le coëfficient de ds dans la differentielle de p doit etre egal au coëfficient de dt dans la differentielle de q; ſoit donc $dp = \alpha\,dt + \nu\,ds$, on aura $dq = \nu\,dt + b\,ds$, α, ν, β, etant encore des fonctions inconnuës de t & de s. Fig. 2.

III. De là il s'enſuit, que comme les cotés Mm, mn, appartiennent à la même courbe, on aura $pm - PM$ égale à la difference de $\varphi(t, s,)$ en ne faiſant varier que s, c. à. d. que $pm - PM = q\,ds = ds\,.\,q$; & que la quantité que nous avons nommé cy-deſſus ddy, c. a. d. la difference ſeconde de P M, priſe en ne faiſant varier que s, ſera $ds\,.\,b\,ds$, on aura donc $\frac{F\,ddy}{ds^2} = F\,\beta$.

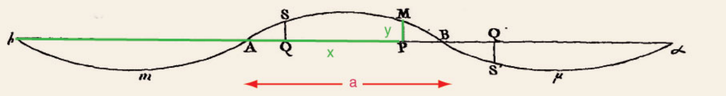
IV. Imaginons preſentement que les points M, m, n viennent en M', m', n'; il eſt certain que l'excés de PM' ſur P M ſera egal à la difference de $\varphi(t, s,)$ priſe en ne faiſant varier que t, c. à. d. que $PM' - PM = p\,dt = dt\,.\,p$; & que la difference ſeconde de P M priſe en ne faiſant varier que t, c. à. d. la difference de MM', ou ce qui eſt la même choſe, l'eſpace parcouru par le point M en vertu de la force acceleratrice qui l'anime, ſera $= \alpha\,dt$. Fig. 3.

V. Cela poſé, ſoit a l'eſpace qu'un corps peſant animé de la gravité p, parcourreroit dans un tems donné & conſtant θ: il eſt evident que l'on aura (par le Lem. XI. Sect. I. Liv. I. Princ. Math.)

αdt^2:

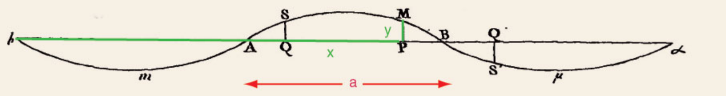
Le problème des cordes vibrantes

- Une corde de longueur *a* est tendue entre ses extrémités et mise en vibration.



Le problème des cordes vibrantes

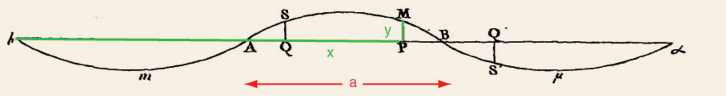
- Une corde de longueur a est tendue entre ses extrémités et mise en vibration.



- À un instant t donné, on regarde le point d'abscisse x de la corde, et on cherche son ordonnée $y(t, x)$.

Le problème des cordes vibrantes

- Une corde de longueur a est tendue entre ses extrémités et mise en vibration.



- À un instant t donné, on regarde le point d'abscisse x de la corde, et on cherche son ordonnée $y(t, x)$.
- C'est une fonction de deux variables, t et x.

Le problème des cordes vibrantes

- D'Alembert modélise cette situation en utilisant les travaux de Newton en physique.

Le problème des cordes vibrantes

- D'Alembert modélise cette situation en utilisant les travaux de Newton en physique.
- Il trouve une équation...

Le problème des cordes vibrantes

- D'Alembert modélise cette situation en utilisant les travaux de Newton en physique.
- Il trouve une équation... dont l'inconnue est une fonction :

Le problème des cordes vibrantes

- D'Alembert modélise cette situation en utilisant les travaux de Newton en physique.
- Il trouve une équation... dont l'inconnue est une fonction : c'est l'équation des ondes.

Le problème des cordes vibrantes

- D'Alembert modélise cette situation en utilisant les travaux de Newton en physique.
- Il trouve une équation... dont l'inconnue est une fonction : c'est l'équation des ondes.

titution, & ſuppoſant (ce qui eſt permis) $a\,e\,m\,a = \theta^2$, on aura $-\frac{d\,d\,y}{d\,t^2} = -\frac{d\,d\,y}{d\,x^2}$ ou $\frac{d\left(\frac{d\,y}{d\,t}\right)}{d\,t} = \frac{d\left(-\frac{d\,y}{d\,x}\right)}{d\,x}$; d'où il s'enſuit que ſi on fait $d\,y = p\,d\,t + q\,d\,x$, on aura $\frac{d\,p}{d\,t} = \frac{d\,q}{d\,x}$, & que par conſéquent $p\,d\,x + q\,d\,t$ ſera une différentielle exacte, auſſi-bien que $p\,d\,t + q\,d\,x$;

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Le problème des cordes vibrantes

Il résout cette équation, et démontre que l'ordonnée recherchée s'écrit

$$y(t, x) = f(t + x) - f(t - x),$$

où f est une fonction périodique de période $2a$.

VII. Pour déterminer par ces conditions les quantités α & ν, on remarquera, que comme $dp = \alpha\,dt + \nu\,ds$, & $dq = \nu\,dt + \alpha\,ds$, on aura $dp + dq = (\alpha + \nu) \cdot (dt + ds)$; & $dp - dq = (\alpha - \nu) \cdot (dt - ds)$. d'où il s'enſuit

1°, que $\alpha + \nu$ eſt egale à une fonction de $t + s$, & que $\alpha - \nu$ eſt ogal a une fonction de $t - s$.

2°. Que par conſequent on aura $p = \frac{\Phi(t+s) + \Delta(t-s)}{2}$ ou ſimplement $= \Phi(t+s) + \Delta(t-s)$; & $q = \Phi(t+s) - \Delta(t-s)$, d'où l'on tire P M ou $s(p\,dt + q\,ds) = \psi(t+s) + \Gamma(t-s)$, $\psi(t+s)$ & $\Gamma(t-s)$ exprimant des fonctions encore inconnuës de $t + s$ & de $t - s$.
l'equation generale de la courbe eſt donc

$$y = \psi(t+s) + \Gamma(t-s).$$

VIII. Or il eſt aiſé de voir que cette equation renferme une infinité de courbes. Pour le faire voir, ne prenons icy qu'un cas particulier, ſavoir celui, où $y = o$, quand $t = o$; c. à. d. ſuppoſons que la corde, lorſqu'elle commence à entrer en vibration, ſoit etenduë en ligne droite, & qu'elle ſoit forcée à ſortir de ſon etat de repos, par l'action de quelque cauſe que ce puiſſe etre; il eſt evident que l'on aura $\psi s + \Gamma - s = o$, donc $\Gamma - s = - \psi s$. De plus, comme la corde paſſe toujours par les points fixes A & B, il faut que $s = o$, & $s = l$, rendent $y = o$, quelle que ſoit t; donc 1°. $\psi t + \Gamma t = o$, & $\Gamma t = - \psi t$; donc $\Gamma(t - s) = - \psi(t - s)$; donc on aura $y = \psi(t+s) - \psi(t-s)$; donc il faut que $-\psi - s = \Gamma s = -\psi s$; donc ψs doit etre une fonction de s dans laquelle il n'entre que des puiſſances paires, lorſqu'on l'aura reduite en ſerie. 2°. De plus la condition de $y = o$ lorſque $s = l$, donne $\psi(t+l) - \psi(t-l) = o$. Il faut donc trouver une quantité $\psi(t+s)$, telle, que $\psi s - \psi - s = o$ & $\psi(t+l) - \psi(t-l) = o$.

Le problème des cordes vibrantes

- En particulier, la forme de la corde en vibration n'est pas forcément une sinusoïde !

Le problème des cordes vibrantes

- En particulier, la forme de la corde en vibration n'est pas forcément une sinusoïde !
- Euler et Bernoulli se montreront assez critiques sur le mémoire de D'Alembert.

Le problème des cordes vibrantes

- En particulier, la forme de la corde en vibration n'est pas forcément une sinusoïde !
- Euler et Bernoulli se montreront assez critiques sur le mémoire de D'Alembert.
- Malgré tout, les travaux de D'Alembert auront une influence considérable sur le développement des mathématiques.

Le problème des cordes vibrantes

- Pierre Simon de Laplace (1749–1827) : équation de Laplace en physique.

Le problème des cordes vibrantes

- Pierre Simon de Laplace (1749–1827) : équation de Laplace en physique.

- Joseph Louis Lagrange (1736–1813) : équations de Lagrange en mécanique.

Le problème des cordes vibrantes

- Pierre Simon de Laplace (1749–1827) : équation de Laplace en physique.

- Joseph Louis Lagrange (1736–1813) : équations de Lagrange en mécanique.

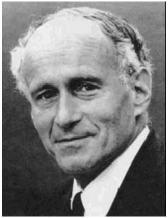
- Joseph Fourier (1768–1830) : équation de la chaleur.

Le problème des cordes vibrantes

- La question ne sera complètement résolue que dans les années 1940...

Le problème des cordes vibrantes

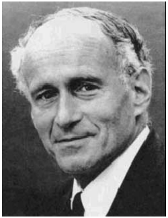
- La question ne sera complètement résolue que dans les années 1940...



Laurent Schwartz (1915-2002)

Le problème des cordes vibrantes

- La question ne sera complètement résolue que dans les années 1940...



Laurent Schwartz (1915-2002)

- Schwartz obtiendra la médaille Fields en 1950.

« À eux seuls les travaux de D'Alembert sur les cordes vibrantes suffiraient à rendre son nom immortel. »

L. de Broglie (1951)