LE COLLOQUIUM EN MATHÉMATIQUES

LE LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DE BESANÇON
ORGANISE UNE SÉRIE D'EXPOSÉS ADRESSÉS À TOUS CEUX
QUI S'INTÉRESSENT À LA RECHERCHE MATHÉMATIQUE.

LES CONFÉRENCIERS INVITÉS SONT DES SPÉCIALISTES DE RÉNOMMÉE MONDIALE.

NOUS ESPÉRONS CES EXPOSÉS PASSIONNANTS,
ACCESSIBLES AU MOINS POUR UNE PARTIE, À UN LARGE PUBLIC
D'ENSEIGNANTS ET ENSEIGNANTS-CHERCHEURS,
D'ÉTUDIANTS VISANT UN MASTER EN MATHÉMATIQUES...
ET, PLUS GÉNÉRALEMENT, À TOUT ESPRIT CURIEUX !

LA PROCHAINE SÉANCE AURA LIEU :

le jeudi 23 février à 16h30
à l'Amphi B, bât.B de l'UFR ST

Denis Serre (ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON)

" L'image numérique d'une matrice "

RÉSUMÉ:

En 1918 (Toeplitz) et 1919 (Hausdorff) paraissent deux articles concernant l'image numérique (numerical range) d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$. Cet objet est fondamental pour l'étude de la stabilité des équations différentielles et des systèmes dynamiques. Le résultat essentiel est aujourd'hui appelé Théorème de Toeplitz-Hausdorff : l'image numérique est une partie compacte convexe du plan complexe. Depuis lors, plusieurs connexions ont été faites avec d'autres domaines des mathématiques, par exemple avec les opérateurs différentiels de type hyperbolique. Je présenterai d'abord un certain nombre de faits qui s'expriment au moyen de l'image numérique. Je poursuivrai par un concept plus précis, développé en collaboration avec Thierry Gallay (Université de Grenoble) : la mesure numérique de la matrice A. Supportée par l'image numérique, cette mesure jouit de propriétés surprenantes.

L'image numérique d'une matrice

Denis Serre
École Normale Supérieure de Lyon

23 février 2012, U. F.-C., Besançon

En 1918 (Toeplitz) et 1919 (Hausdorff) paraissent deux articles concernant l'**image numérique** (*numerical range*) d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Cet objet est fondamental pour l'étude de la stabilité des équations différentielles et des systèmes dynamiques. Le résultat essentiel est aujourd'hui appelé *Théorème de Toeplitz–Hausdorff* : l'image numérique est une partie compacte convexe du plan complexe. Depuis lors, plusieurs connexions ont été faites avec d'autres domaines des mathématiques, par exemple avec les opérateurs différentiels de type hyperbolique.

Je présenterai d'abord un certain nombre de faits qui s'expriment au moyen de l'image numérique, encore appelée *Hausdorffien* ;

- Conjugaison unitaire à une matrice de diagonale constante,
- Le rayon numérique comme norme super-stable,
- Le bord du Hausdorffien comme enveloppe d'une famille de droites.

Le traitement numérique de quelques exemples, génériques ou non, est particulièrement éclairant.

Je poursuivrai par un concept plus précis, développé en collaboration avec Thierry Gallay (UJF, Grenoble) : la **mesure numérique** de la matrice A. Supportée par l'image numérique, cette mesure jouit de propriétés surprenantes :

- Si A est une matrice normale, la densité de cette mesure est une B-spline du plan $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ (d'une droite si les valeurs propres sont alignées). En particulier, cette densité est log-concave. Les noeuds sont les valeurs propres de A.
- La densité numérique peut être reconstruite en inversant une transformée de Radon,
- Lorsque A n'est pas normale, il apparaît quand même des zônes où sa densité numérique est polynomiale. Ces zônes se trouvent être les *lacunes* d'un opérateur différentiel en $2+1$ variables. On retrouve ainsi des résultats profond de Bazer et Yen, généralisés par Atiyah, Bott et Gårding aux opérateurs en un nombre de variables quelconque.