# Un calcul fonctionnel joint pour des opérateurs sectoriels

**F. et G. Lancien, C. Le Merdy**

Résumé : Dans cette note, nous étudions la notion de calcul fonctionnel $H^\infty$ joint associé à un couple d'opérateurs sectoriels et dont les résolvantes commutent, sur un espace de Banach $X$. Nous présentons différents résultats positifs dans le cas où $X$ est par exemple un treillis de Banach ou un quotient de sous-espaces d'un treillis de Banach B-convexe. Par ailleurs, nous développons une notion de calcul fonctionnel $H^\infty$ généralisé associé à l'extension à $\Lambda(H)$ d'un opérateur sectoriel défini sur un treillis de Banach B-convexe $\Lambda$, où $H$ est un espace de Hilbert. En application de ces deux thèmes, nous obtenons une nouvelle méthode de construction d'opérateurs admettant un calcul fonctionnel $H^\infty$ borné, ainsi que des résultats concernant le problème de la régularité maximale.

Abstract : In this note we study the notion of joint functional calculus associated with a couple of resolvent commuting sectorial operators on a Banach space $X$. We present some positive results when $X$ is for example a Banach lattice or a quotient of subspaces of a B-convex Banach lattice. Besides, we develop a notion of generalized $H^\infty$ functional calculus associated with the extension to $\Lambda(H)$ of a sectorial operator on a B-convex Banach lattice $\Lambda$; where $H$ is a Hilbert space. We apply our results to a new construction of operators with a bounded $H^\infty$ functional calculus and to the maximal regularity problem.

**Abridged english version**

In this note, $X$ will denote a complex Banach space and $B(X)$ the algebra of all bounded operators on $X$. For $\theta$ and $\theta'$ in $(0,\pi)$, we use the following notations :

$$\Sigma_\theta = \{z \in \setminus\{0\}\ ;\ |\arg z| < \theta\}, \quad \Gamma_\theta(t) = \begin{cases} -te^{i\theta} & \text{si } -\infty < t \leq 0 \\ te^{-i\theta} & \text{si } 0 \leq t < +\infty \end{cases} \tag{1}$$

$H^\infty(\Sigma_\theta)$ (resp. $H^\infty(\Sigma_\theta \times \Sigma_{\theta'})$) is the space of all bounded holomorphic functions on $\Sigma_\theta$ (resp. $\Sigma_\theta \times \Sigma_{\theta'}$). Let $\varphi(z) = \dfrac{z}{(1+z)^2}$ and $\psi(z,z') = \varphi(z)\varphi(z')$.

$$H_0^\infty(\Sigma_\theta) = \{f \in H^\infty(\Sigma_\theta)\,;\, \exists\, s>0 \text{ st } \varphi^{-s} f \in H^\infty(\Sigma_\theta)\}$$

$$H_0^\infty(\Sigma_\theta \times \Sigma_{\theta'}) = \{F \in H^\infty(\Sigma_\theta \times \Sigma_{\theta'})\,;\, \exists\, s>0 \text{ st } \psi^{-s} F \in H^\infty(\Sigma_\theta \times \Sigma_{\theta'})\}$$

For $\omega$ in $[0,\pi)$, we say that a linear operator $A$ on $X$ is sectorial of type $\omega$ if $A$ is closed, one to one, with dense range $R(A)$ and dense domain $D(A)$, and if its spectrum $\sigma(A)$ is included in $\overline{\Sigma_\omega}$ and satisfies :

$$\forall\, \theta \in (\omega,\pi)\ \exists C>0 \text{ st } \forall\, z \in \backslash\overline{\Sigma_\theta}\quad \|z(A-z)^{-1}\| \le C \tag{2}$$

Let $A$ a sectorial operator of type $\omega$ (resp. two sectorial operators $A$ and $B$ of types $\omega$ and $\omega'$, with commuting resolvents) and let $\omega<\theta<\mu$ (resp. $\omega<\theta<\mu$, $\omega'<\theta'<\mu'$). For $f \in H_0^\infty(\Sigma_\mu)$ (resp. $F \in H_0^\infty(\Sigma_\mu \times \Sigma_{\mu'})$ one defines (see [McI], [C-D-McI-Y], [A]) the bounded operator

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_\theta} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \tag{3}$$

$$\text{resp. } F(A,B) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_\theta \times \Gamma_{\theta'}} F(\lambda,\lambda')(\lambda-A)^{-1}(\lambda'-B)^{-1} d\lambda\, d\lambda' \tag{4}$$

These integrals converge in $B(X)$ and do not depend on $\theta \in (\omega,\mu)$ or $(\theta,\theta') \in (\omega,\mu)\times(\omega',\mu')$. For $f \in H^\infty(\Sigma_\mu)$, we define $f(A) = \varphi(A)^{-1}(f\varphi)(A)$ and for $F \in H^\infty(\Sigma_\mu \times \Sigma_{\mu'})$, $F(A,B) = \psi(A,B)^{-1}(F\psi)(A,B)$. These operators are closed but unbounded in general. Then the question is to determine the functions for which they are bounded. We say that $A$ (resp. $(A,B)$) admits a bounded $H^\infty(\Sigma_\mu)$ functional calculus (resp. a bounded $H^\infty(\Sigma_\mu \times \Sigma_{\mu'})$ joint functional calculus) if for all $f \in H^\infty(\Sigma_\mu)$ (resp. for all $F \in H^\infty(\Sigma_\mu \times \Sigma_{\mu'})$), $f(A)$ (resp. $F(A,B)$) is bounded.

Our main result about the joint functional calculus is the following:

Theorem 1: Let $X$ be a Banach lattice or the quotient of two subspaces of a B-convex Banach lattice. Then for any $A$ and $B$, two sectorial operators with respective types $\omega$ et $\omega'$, with commuting resolvents and admitting a bounded $H^\infty$ functional calculus, respectively on $\Sigma_\mu$ and $\Sigma_{\mu'}$, then for every $(\beta, \beta') \in (\mu, \pi) \times (\mu', \pi)$, the couple $(A, B)$ admits a bounded $H^\infty(\Sigma_\beta \times \Sigma_{\beta'})$ joint functional calculus.

As an application of the existence of a joint functional calculus, we describe a whole family of operators constructed from $A$ and $B$ and admitting a bounded $H^\infty$ functional calculus. In particular:

Theorem 2: Under the hypotheses of Theorem 1, with the additional assumptions: $X$ reflexive and $\mu + \mu' < \pi$, we have:

i) $A+B$ is a sectorial operator and admits a bounded $H^\infty(\Sigma_\theta)$ functional calculus, for any $\theta > \max(\mu, \mu')$.

ii) $\overline{AB}$ is a sectorial operator and admits a bounded $H^\infty(\Sigma_\theta)$ functional calculus, for any $\theta > \mu + \mu'$.

Now we consider a B-convex Banach lattice $\wedge$. Such a lattice can be represented as a function lattice on a measure space $(\Omega, \Sigma, \mu)$, then let $\wedge(H) = \{f : \Omega \to H$ strongly measurable, st $\|f(.)\|_H \in \wedge\}$, where $H$ is a Hilbert space. $B(H)$ is canonically identified with a closed subalgebra of $B(\wedge(H))$. Let $A$ be a sectorial operator of type $\omega$ on $\wedge$, its natural extension $\mathcal{A}$ to $\wedge(H)$ is also sectorial of type $\omega$. Let $\mu > \omega$, for any $f$ in $H_0^\infty(\Sigma_\mu, B(H))$ (the set of all bounded analytic functions on $\Sigma_\mu$ with values in $B(H)$ such that there exists $s > 0$, $\varphi^{-s} f$ is bounded on $\Sigma_\mu$), we define $u(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\theta} f(\lambda).(\lambda - A)^{-1} d\lambda$ . For $f \in H^\infty(\Sigma_\mu, B(H))$ we set $u(f) = \varphi(A)^{-1} u(f\varphi)$; and we say that $\mathcal{A}$ admits a bounded $H^\infty(\Sigma_\mu, B(H))$ functional calculus if $u(f)$ is bounded for any $f$ in $H^\infty(\Sigma_\mu, B(H))$. Our first result on this notion is:

Theorem 3: Let $0 \leq \omega < \mu < \theta < \pi$. With the above notations, we assume moreover that $A$ admits a bounded $H^\infty(\Sigma_\mu)$ functional calculus. Then $\mathcal{A}$ admits a bounded $H^\infty(\Sigma_\theta, B(H))$ functional calculus.

Then we apply this theorem to get some results on the maximal regularity of certain sectorial operators.

Finally we show that the above property characterizes Hilbert spaces among Banach spaces. More precisely, we have:

Theorem 4: Let $X$ be a Banach space, $\ = \{z \in \ / |z| = 1\}$, $A$ the operator $\frac{d}{dt}$ on $L^p(, X)$ and $\mu \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. then $\mathcal{A}$ admits a bounded $H^\infty(\Sigma_\mu, B(X))$ functional calculus if and only if $X$ is a Hilbert space.

## I - Le calcul fonctionnel joint

Dans cette note, $X$ désignera un espace de Banach sur  et $B(X)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur $X$. Pour $\theta$ et $\theta'$ dans $(0, \pi)$, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\Sigma_\theta = \{z \in \ \backslash \{0\} \ ; \ |\arg z| < \theta\}, \quad \Gamma_\theta(t) = \begin{cases} -te^{i\theta} & \text{si } -\infty < t \leq 0 \\ te^{-i\theta} & \text{si } 0 \leq t < +\infty \end{cases} \tag{1}$$

$H^\infty(\Sigma_\theta)$ (resp. $H^\infty(\Sigma_\theta \times \Sigma_{\theta'})$) est l'espace des fonctions holomorphes et bornées sur $\Sigma_\theta$ (resp. $\Sigma_\theta \times \Sigma_{\theta'}$). Soient $\varphi(z) = \dfrac{z}{(1+z)^2}$ et $\psi(z, z') = \varphi(z)\varphi(z')$.

$$H_0^\infty(\Sigma_\theta) = \{f \in H^\infty(\Sigma_\theta) \, ; \, \exists \ s > 0 \text{ tq } \varphi^{-s} f \in H^\infty(\Sigma_\theta)\}$$

$$H_0^\infty(\Sigma_\theta \times \Sigma_{\theta'}) = \{F \in H^\infty(\Sigma_\theta \times \Sigma_{\theta'}) \, ; \, \exists \ s > 0 \text{ tq } \psi^{-s} F \in H^\infty(\Sigma_\theta \times \Sigma_{\theta'})\}$$

Pour $\omega$ dans $[0, \pi)$, un opérateur linéaire $A$ sur $X$ est dit sectoriel de type $\omega$ si $A$ est fermé, injectif, d'image $R(A)$ et de domaine $D(A)$ denses, et si son spectre $\sigma(A)$ est inclus dans $\overline{\Sigma_\omega}$ et vérifie :

$$\forall \ \theta \in (\omega, \pi) \ \exists C > 0 \text{ tq } \forall \ z \in \ \backslash \overline{\Sigma_\theta} \ \ \|z(A - z)^{-1}\| \leq C \tag{2}$$

Soit $A$ un opérateur sectoriel de type $\omega$ (resp. deux opérateurs sectoriels $A$ et $B$ de types $\omega$ et $\omega'$, dont les résolvantes commutent) et soit $\omega < \theta < \mu$ (resp. $\omega < \theta < \mu$, $\omega' < \theta' < \mu'$). Pour $f \in H_0^\infty(\Sigma_\mu)$ (resp. $F \in H_0^\infty(\Sigma_\mu \times \Sigma_{\mu'})$ on définit (voir [McI], [C-D-McI-Y], [A]) l'opérateur borné

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\theta} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \tag{3}$$

$$\text{resp. } F(A, B) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_\theta \times \Gamma_{\theta'}} F(\lambda, \lambda')(\lambda - A)^{-1}(\lambda' - B)^{-1} d\lambda \, d\lambda' \tag{4}$$

Ces intégrales convergent dans $B(X)$ et ne dépendent pas de $\theta \in (\omega, \mu)$ ou de $(\theta, \theta') \in (\omega, \mu) \times (\omega', \mu')$. Pour $f \in H^\infty(\Sigma_\mu)$, on définit alors $f(A) = \varphi(A)^{-1}(f\varphi)(A)$ et pour

$F \in H^\infty(\Sigma_\mu \times \Sigma_{\mu'})$), $F(A,B) = \psi(A,B)^{-1}(F\psi)(A,B)$). Ces opérateurs sont fermés mais non bornés en général. Le problème est alors de déterminer les fonctions pour lesquelles ils sont bornés. On dit que $A$ (resp. $(A,B)$) admet un calcul $H^\infty$ borné sur $\Sigma_\mu$, ou un calcul $H^\infty(\Sigma_\mu)$ borné (resp. un calcul $H^\infty$ joint borné sur $\Sigma_\mu \times \Sigma_{\mu'}$) si $\forall f \in H^\infty(\Sigma_\mu)$ (resp. $\forall F \in H^\infty(\Sigma_\mu \times \Sigma_{\mu'})$), $f(A)$ (resp. $F(A,B)$) est borné.

Dans cette partie, nous cherchons à déterminer les espaces de Banach qui possèdent la propriété du calcul joint, ainsi définie:

Définition: On dit qu'un espace de Banach $X$ possède la propriété du calcul joint si pour tous $A$ et $B$ opérateurs sectoriels de types respectifs $\omega$ et $\omega'$, dont les résolvantes commutent et admettant un calcul $H^\infty$ borné, respectivement sur $\Sigma_\mu$ et $\Sigma_{\mu'}$, alors pour tout $(\beta, \beta') \in (\mu, \pi) \times (\mu', \pi)$, le couple $(A,B)$ admet un calcul $H^\infty$ joint borné sur $\Sigma_\beta \times \Sigma_{\beta'}$.

D'après une construction de McIntosh et Yagi [McI-Y], l'espace des opérateurs compacts sur l'espace de Hilbert $\ell_2$ n'a pas la propriété du calcul joint. D.Albrecht [A] a montré que pour tout $1 < p < +\infty$, $L^p$ possède la propriété du calcul joint. Récemment, Franks et McIntosh [F-McI] ont établi un théorème de décomposition analytique grâce auquel ils obtiennent une nouvelle démonstration du théorème d'Albrecht. L'utilisation de cette même décomposition analytique permet en fait d'étendre ce résultat. Pour cela nous utilisons des notions de géométrie des espaces de Banach, au sujet desquelles nous renvoyons le lecteur à [Pi1,Pi2,L-T]. Notre énoncé est le suivant :

Théorème 1.1 : Tout espace de Banach possèdant une structure locale inconditionnelle possède la propriété du calcul joint.

Pour la suite, considérons la classe d'espaces de Banach suivante, introduite par G. Pisier [Pi3] : un espace de Banach $X$ possède la propriété $(\alpha)$ si il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité

$$\int_{I^2} \Big\| \sum_{1 \le i,j \le n} \alpha_{i,j} r_i(s) r_j(t) x_{i,j} \Big\|^2 ds\, dt \le C \sup_{1 \le i,j \le n} |\alpha_{i,j}|^2 \int_{I^2} \Big\| \sum_{1 \le i,j \le n} r_i(s) r_j(t) x_{ij} \Big\|^2 ds\, dt$$

est vérifiée pour tout entier $n$ et tout choix de $(\alpha_{i,j})$ dans ${}^{n^2}$ et $(x_{i,j})$ dans $X^{n^2}$ , $(r_n)$ désignant la suite des fonctions de Rademacher sur $I = [0,1]$.

Théorème 1.2 : Soit $X$ un espace de Banach tel que $X$ ou $X^*$ possède la propriété $(\alpha)$, alors $X$ possède la propriété du calcul joint.

Grâce aux résultats de [Pi3] nous déduisons du Théorème 1.2 :

Corollaire 1.3 : soit $E$ un espace de Banach possèdant la propriété de Gordon-Lewis.

i) Si $E$ possède un cotype fini, alors tout sous-espace de $E$ possède la propriété du calcul joint.

ii) Si $E^*$ possède un cotype fini, alors tout quotient de $E$ possède la propriété du calcul joint.

iii) Si $E$ et $E^*$ possèdent un cotype fini, alors tout quotient de sous-espaces de $E$ possède la propriété du calcul joint.

En particulier, tout sous-espace de $L^1$ et tout quotient de sous-espaces d'un treillis de Banach $B$-convexe possède la propriété du calcul joint.

Remarque : Les résultats du Théorème 1.1 et du Corollaire 1.3 s'étendent au cas de $n$ opérateurs sectoriels $A_1, \ldots, A_n$ dont les résolvantes commutent.

La première application de l'existence d'un calcul joint borné pour un couple d'opérateurs sectoriels est la construction de nouveaux opérateurs admettant un calcul $H^\infty$ borné. Considérons un couple $(A, B)$ possédant un calcul $H^\infty$ joint borné sur $\Sigma_\mu \times \Sigma_{\mu'}$ et une fonction $P : \Sigma_\mu \times \Sigma_{\mu'} \to$ holomorphe et polynomialement bornée, c'est-à-dire qu'il existe $k \in$ et $C > 0$ tels que $|P(z, z')| \leq C\big(|z|^k + |z'|^k + |z|^{-k} + |z'|^{-k}\big)$ pour tout $(z, z') \in \Sigma_\mu \times \Sigma_{\mu'}$. On utilise alors l'opérateur $\psi^k(A, B)$, qui est borné, injectif et à image dense, pour définir l'opérateur non borné $P(A, B) = \psi^k(A, B)^{-1}(P\psi^k)(A, B)$. Cet opérateur est fermé et son domaine est dense car il contient l'image de $\psi^k(A, B)$. Le résultat est alors le suivant :

Théorème 1.4 : Sous les hypothèses ci-dessus et si $P(\Sigma_\mu \times \Sigma_{\mu'}) \subset \Sigma_\omega$ où $\omega \in (0, \pi)$, alors $\sigma(P(A, B)) \subset \overline{\Sigma_\omega}$. Si de plus $P(A, B)$ est injectif à image dense, alors $P(A, B)$ est sectoriel de type $\omega$ et possède un calcul $H^\infty$ borné sur $\Sigma_\Theta$, pour tout $\theta > \omega$. Ce calcul fonctionnel vérifie la propriété de composition :

$$\forall\ f \in H^\infty(\Sigma_\theta),\ f(P(A, B)) = (f \circ P)(A, B).$$

Indiquons brièvement l'étape essentielle de la démonstration. Soit $\lambda \notin \overline{\Sigma_\omega}$ et soit $f_\lambda(z, z') =$

$\dfrac{1}{\lambda - P(z,z')}$ pour $(z,z') \in \Sigma_\mu \times \Sigma_{\mu'}$. On a $f_\lambda \in H^\infty(\Sigma_\mu \times \Sigma_{\mu'})$. On montre alors que $\lambda \in \rho(P(A,B))$ et que $(\lambda - P(A,B))^{-1} = f_\lambda(A,B)$ avec de plus, pour tout $\theta \in (\omega,\mu)$ et tout $g \in H_0^\infty(\Sigma_\mu)$, la formule intégrale suivante:

$$(\lambda - P(A,B))^{-1} g(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\theta} g(z) f_\lambda(z,.)(B)(z-A)^{-1} dz \tag{5}$$

Exemple 1.5 : $P(z,z') = z + z'$.

Les hypothèses du Théorème 1.4 sont vérifiées si $\mu + \mu' < \pi$ et $\omega = \max\{\mu,\mu'\}$. On montre alors aisément à l'aide du calcul joint borné que $P(A,B) = A + B$ (en particulier cet opérateur est fermé) et que cet opérateur est injectif. Lorsque $X$ est réflexif, on a que $A + B$ est d'image dense et possède donc un calcul $H^\infty$ borné sur tout secteur $\Sigma_\theta$, avec $\theta > \max(\mu,\mu')$. Dans ce cas particulier, la formule (5) est essentiellement la formule intégrale introduite par G. Da Prato et P. Grisvard pour l'étude d'une somme d'opérateurs sectoriels [DP-G, (3.11) et Théorème 3.7].

Exemple 1.6 : $P(z,z') = zz'$.

Pour $\mu + \mu' = \omega < \pi$, on obtient que $P(A,B) = \overline{AB}$ et que cet opérateur a une image dense. Si de plus $X$ est réflexif, $\overline{AB}$ est injectif et possède un calcul $H^\infty$ borné sur $\Sigma_\theta$, pour $\theta > \omega$.

Ces deux exemples sont bien sûr inspirés des situations étudiées par G. Dore et A. Venni [D-V] puis J. Prüss et H. Sohr [Pr-S] dans le cas où $X$ est un espace UMD et où $A$ et $B$ admettent des puissances imaginaires bornées. En effet, soient $A$ et $B$ deux opérateurs sectoriels sur $X$ dont les résolvantes commutent et soient $\mu,\mu'$ tels que $\mu+\mu' < \pi$. Pruss et Sohr on démontré, étendant ainsi les travaux de Dore et Venni, que si $X$ est un espace UMD, si $A \in BIP(X,\mu)$, $B \in BIP(X,\mu')$, alors $A + B \in BIP(X,\theta)$ dès que $\theta > \max\{\mu,\mu'\}$. Sous les mêmes hypothèses, ils ont prouvé que $AB$ est fermable et $\overline{AB} \in BIP(X,\mu+\mu')$ (voir [Pr-S] pour les notations). Le Corollaire 1.3 (iii) et le Théorème 1.4 montrent, via les Exemples 1.5 et 1.6, que si $X$ est un quotient de sous-espaces d'un treillis de Banach B-convexe, et si $A$ possède un calcul $H^\infty$ borné sur $\Sigma_\mu$, $B$ possède un calcul $H^\infty$ borné sur $\Sigma_{\mu'}$, alors $A + B$ possède un calcul $H^\infty$ borné sur $\Sigma_\theta$ dès que $\theta > \max\{\mu,\mu'\}$. De même $\overline{AB}$ possède un calcul $H^\infty$ borné sur $\Sigma_\theta$ dès que $\theta > \mu + \mu'$.

Exemple 1.7 : $P(z,z') = z + z' + zz'$.

Supposons $\mu + \mu' = \omega < \theta < \pi$. $P(A,B) = A + B + AB$ est un opérateur fermé et injectif. Si $X$ est réflexif, $A + B + AB$ est d'image dense et possède un calcul $H^\infty$ sur $\Sigma_\theta$. Il faut remarquer ici que la simple combinaison des Exemples 1.5 et 1.6 nécessiterait l'hypothèse plus forte :max $\{\mu, \mu'\} + \mu + \mu' < \pi$.

## II - Le calcul fonctionnel $H^\infty(\Sigma_\mu, B(H))$ sur $\wedge(H)$ - Application à la régularité maximale

Soit $\wedge$ un treillis de Banach B-convexe. Un tel treillis est continu pour l'ordre et il est alors bien connu (voir [L-T]) que $\wedge$ peut être représentè comme un treillis de fonctions sur un espace mesuré $(\Omega, \Sigma, \mu)$. Soit $H$ un espace de Hilbert. Notons $\wedge(H) = \{f : \Omega \to H$ fortement mesurables, tq $\|f(.)\|_H \in \wedge\}$. La proposition suivante rassemble les propriétés de $\wedge$ qui nous seront utiles :

Proposition 2.1 :

i) $\wedge \otimes H$ est dense dans $\wedge(H)$.

ii) Si $A$ est un opérateur sectoriel de type $\omega$ sur $\wedge$, alors $A \otimes I_H$, défini sur $D(A) \otimes H$, est un opérateur fermable, dont la fermeture $\mathcal{A}$ est sectorielle de type $\omega$.

Par ailleurs, pour tout $T \in B(H)$, $I_\wedge \otimes T$ se prolonge en un opérateur borné de même norme que $T$ sur $\wedge(H)$. On peut donc identifier $B(H)$ avec une sous-algèbre de $B(\wedge(H))$ dont les éléments commutent avec les résolvantes de $\mathcal{A}$. Soit $\mu > \omega$, pour tout $f$ dans $H_0^\infty(\Sigma_\mu, B(H))$ (l'espace des fonctions analytiques bornées sur $\Sigma(\mu)$ à valeurs dans $B(H)$ et telles qu'il existe $s > 0$, vérifiant $\varphi^{-s} f$ bornée sur $\Sigma(\mu)$), nous définissons $u(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\theta} f(\lambda).(\lambda - A)^{-1} d\lambda$ . Pour $f \in H^\infty(\Sigma_\mu, \mathcal{B}(H))$ on pose $u(f) = \varphi(A)^{-1} u(f\varphi)$; et on dit que $\mathcal{A}$ admet un calcul fonctionnel $H^\infty(\Sigma_\mu, B(H))$ borné si $u(f)$ est borné pour tout $f$ dans $H^\infty(\Sigma_\mu, B(H))$. Tout est maintenant en place pour énoncer le premier résultat de cette partie.

Théorème 2.2 : Soient $0 \leq \omega < \mu < \theta < \pi$. Avec les notations introduites ci-dessus, supposons de plus que $A$ admet un calcul $H^\infty(\Sigma_\mu)$ borné. Alors $\mathcal{A}$ possède un calcul $H^\infty(\Sigma_\Theta, B(H))$ borné.

En application, considérons un opérateur $A$ sur $\wedge$ vérifiant les hypothèses du Théorème 2.2 et un opérateur $B$ sur $H$, sectoriel de type $\omega'$, avec $\omega' + \mu < \pi$. En tensorisant $B$ avec $I_\wedge$, on obtient une extension $\mathcal{B}$ de $B$ à $\wedge(H)$ qui est aussi sectorielle de type $\omega'$. Soit maintenant $\mu < \theta < \pi - \omega'$. En utilisant la fonction $\lambda \mapsto \lambda(\lambda + \mathcal{B})^{-1}$ qui appartient à $H^\infty(\Sigma_\mu, B(H))$ et le Théorème 2.2, on peut montrer :

Corollaire 2.3 : $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est un opérateur fermé injectif d'image et de domaine denses et vérifiant :

$$\forall\ x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}) \quad \|\mathcal{A}x\| \leq \|(\mathcal{A} + \mathcal{B})x\| \tag{6}$$

Remarque : Soient $X$ un espace de Banach et $B$ un opérateur sectoriel sur $X$ de type strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$. On dit que $B$ possède la propriété de régularité maximale si, pour $1 < p < \infty$, il existe $C > 0$ tq : $\forall f \in L^p(0,T;X)\ \exists !\ u \in W_0^{1,p}(0,T;X) \cap L^p(0,T;D(B))$ vérifiant $u' + Bu = f$, avec de plus $\|u\| \leq C\,\|f\|$. Il est connu que cette propriété est indépendante de $p \in (1,\infty)$ (voir [C-L]). Soient $\mathcal{A}$ l'opérateur $\frac{d}{dt}$ sur $L^p(0,T;X)$ avec $D(\mathcal{A}) = W_0^{1,p}(0,T;X)$ et $\mathcal{B}$ la fermeture de $I_{L^p} \otimes B$ sur $L^p(0,T;X)$. Il est bien connu (et facile à vérifier) que si $X$ est réfléxif, alors $B$ possède la propriété de régularité maximale si et seulement si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ vérifient (6). Le Corollaire 2.3 peut donc être vu comme une généralisation du théorème suivant du à De Simon [D]: tout opérateur sectoriel de type strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$ sur un espace de Hilbert possède la propriété de régularité maximale.

En combinant les Corollaires 1.3 et 2.3 et le Théorème 1.4 (via l'Exemple 1.5), on montre :

Corollaire 2.4 : Soient $(\Omega, \Sigma, \mu)$, $(\Omega', \Sigma', \mu')$ des espaces mesurés, $1 < p, q < +\infty$, et $H$ un espace de Hilbert. Soient $A$ un opérateur sectoriel de type $\omega$ sur $L^p(\Omega)$, $B$ un opérateur sectoriel de type $\omega'$ sur $L^q(\Omega')$ et $C$ un opérateur sectoriel de type $w''$ sur $H$.
Supposons que $A$ admet un calcul $H^\infty$ sur $\Sigma_\mu$ et que $B$ admet un calcul $H^\infty$ sur $\Sigma_{\mu'}$. Si de plus les inégalités $\mu + \mu' < \pi$ et $\omega'' + \max\{\mu, \mu'\} < \pi$ sont vérifiées ; alors les extensions naturelles $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ de $A, B, C$ à $L^p(L^q(H))$ vérifient les propriétés suivantes : $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}$ est un opérateur fermé injectif, d'image et de domaine denses et tel que

$$\forall\ x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}) \cap D(\mathcal{C})\ \|\mathcal{A}x\| \leq \|(\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C})x\|$$

Exemple : Appliquons ceci avec $A = \dfrac{d}{dt}$ sur $L^p(0,T)$ et $D(A) = W_0^{1,p}(0,T)$. Si $B$ est un opérateur sur $L^q(\Omega)$ possèdant un calcul $H^\infty$ borné sur $\Sigma_{\mu'}$ avec $\mu' < \frac{\pi}{2}$ et si $C$ est un opérateur sectoriel de type $\omega''$ sur un espace de Hilbert $H$, avec $\omega'' < \frac{\pi}{2}$ ; alors l'opérateur $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ sur $L^q(\Omega, H)$ possède la propriété de régularité maximale.

Notons pour finir que le Théorème 3.2 n'est valable que dans le cadre hilbertien. En effet, nous avons la caractérisation suivante :

Théorème 2.5 : Soit $X$ un espace de Banach et soit $\ = \{z \in \ / \,|z| = 1\}$. Soit $A$ l'opérateur $\dfrac{d}{dt}$ sur $L^p(\,,X)$ et soit $\mu \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Alors $A$ admet un calcul $H^\infty(\Sigma_\mu, B(X))$ borné si et seulement si $X$ est un espace de Hilbert.

## Références


[A] D. Albrecht, Functional calculi for commuting unbounded operators, PhD Thesis, Monash University, Australia.

[A-McI] D. Albrecht - A. McIntosh,.....

[C-D-McI-Y] M. Cowling - I. Doust - A. Mc Intosh - A. Yagi, Banach space operators with a bounded $H^\infty$ functional calculus, Journal of Math. Society (1995).

[C-L] T. Coulhon - D. Lamberton, régularité $L^p$ pour les équations d'évolution, Séminaire d'analyse fonctionnelle Paris 6-7, (1984-85), 155-165.

[D] L. De Simon, ......

[DP-G] G. Da Prato - P. Grisvard, ...

[D-V] G. Dore - A. Venni, On the closedness of the sum of two closed operators, Math. Zeit. 196 (1987), 189-201.

[F-McI] E. Franks - A. McIntosh, Discrete quadratic estimates and holomorphic functional calculi of operators in Banach spaces, à paraître.

[L-T] J. Lindenstrauss - L. Tzafriri, Classical Banach spaces II, Springer Verlag, 1977.

[McI] A. McIntosh, Operators which have an $H^\infty$ functional calculus, Miniconference on operator Theory and Partial Differential Equations, Proc. Cent. Math. Analysis, A.N.U., Canberra 14 (1986), 210-231.

[McI-Y] A. McIntosh - A. Yagi, Operators of type $\omega$ without a bounded $H^\infty$ functional calculus, Miniconference on Operators in Analysis, Proc. Cent. Math. Analysis, A.N.U., Canberra 24 (1989), 159-172.

[Pi1] G. Pisier, Some results on Banach spaces without local unconditional structure, Compositio Math. 37 (1978), 3-19.

[Pi2] G. Pisier, Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces, C.B.M.S. regional conference series in mathematics, number 60.

[Pi3] G. Pisier,.....

[Pr] J. Prüss, Evolutionary integral equations and applications, Monographs in Mathematics, vol. 87, Birkhaüser.

[Pr-S] J. Prüss - H. Sohr, On operators with bounded imaginary powers in Banach spaces, Math. Zeit. 203 (1990), 429-452.