Université de Franche-Comté
Licence de Mathématiques, Semestre 3, 2019-20

Devoir Surveillé de Polynômes et Algèbre Linéaire

Jeudi 22 octobre 2019
Durée 3h00
Le sujet comporte 2 pages

Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables, les traducteurs et les calculatrices sont interdits.

Exercice 1.
Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et soit I, J deux idéaux de A.
   Montrer que $I + J = \{i + j;\ i \in I,\ j \in J\}$ est aussi un idéal de A.
2. Le polynôme $P = X^4 + X^2$ est-il un diviseur de $Q = X^6 + X^4 - X^3 - X$? Déterminer $\mathsf{pgcd}(P, Q)$.
3. Les polynômes $P = X^6 - 1$ et $Q = X^{60} - 1$ sont-ils premiers entre eux ? Déterminer $\mathsf{pgcd}(P, Q)$
4. Le polynôme $P = X^4 + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 2.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré 3.
   Rappeler (ou retrouver) les relations liant les coefficients de P avec ses racines.
2. On veut déterminer les solutions $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ du système

$$(S)\ \left\{\begin{array}{ccc} x+y+z & = & 2 \\ xyz & = & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

   (a) Montrer que $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est solution de (S) si et seulement si x, y et z sont des racines du polynôme $Q = X^3 - 2X^2 - \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$.
   (b) Calculer $Q(\frac{1}{2})$ et en déduire les racines de Q.
   (c) Déterminer toutes les solutions de (S) (attention aux invariances par symétrie)

Exercice 3.
Soient P, A, B trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Soient $D_1 = \mathsf{pgcd}(P, A)$ et $D_2 = \mathsf{pgcd}(P, B)$.
Montrer l'équivalence

$$P \mid AB \iff P \mid D_1 D_2$$

Tourner la page s.v.p

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout entier naturel n il existe un polynôme $H_n \in \mathbb{R}[X]$, de degré au plus n, tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^{-x^2})^{(n)} = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x)$$
2. Montrer que le polynôme H_n est unique.
3. Déterminer les expressions de H_0, H_1 et H_2.
4. Montrer que $H_n' = 2nH_{n-1}$
(on pourra utiliser l'égalité $(e^{-x^2})^{(n+1)} = -2x(e^{-x^2})^{(n)} - 2n(e^{-x^2})^{(n-1)}$).
5. Montrer la relation $H_{n+1} = 2XH_n - 2nH_{n-1}$.
6. En déduire une équation différentielle d'ordre 2 satisfaite par H_n.

Exercice 5.

Soient α, β, γ des nombres réels. On considère le polynôme $P = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$.

1. Montrer que $P' = (X-\beta)(X-\gamma) + (X-\alpha)(X-\gamma) + (X-\alpha)(X-\beta)$.
2. En déduire que $P'(\frac{\alpha+\beta}{2}) = -(\frac{\alpha-\beta}{2})^2$ et $P''(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \alpha+\beta-2\gamma$.
3. Montrer alors que $P(\frac{\alpha+\beta}{2}) = (\frac{\alpha+\beta-2\gamma}{2})P'(\frac{\alpha+\beta}{2})$.
4. Supposons que $\alpha \neq \beta$.
   (a) Exprimer la troisième racine γ de P en fonction de $P(\frac{\alpha+\beta}{2})$, $P'(\frac{\alpha+\beta}{2})$ et $\frac{\alpha+\beta}{2}$.
   (b) Rappeler l'équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto P(x)$ au point de coordonnées $(\frac{\alpha+\beta}{2}, P(\frac{\alpha+\beta}{2}))$.
   (c) Rappeler la formule de Taylor pour P en $\frac{\alpha+\beta}{2}$.
   (d) Déterminer l'intersection de T avec la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto P(x)$.
5. Dans cette question on suppose que $\alpha = \beta$. Que peut-on dire de la tangente T?

Université de Franche-Comté
Licence de Mathématiques, Semestre 3, 2018-19

——————————————————————————————————————

Devoir Surveillé de Polynômes et Algèbre Linéaire

Jeudi 22 octobre

Correction

——————————————————————————————————————

Exercice 1.

1. Commenęons par montrer que $I+J$ est un sous-groupe de $(A,+)$.
On a $0 = 0 + 0 \in I + J$ et d'autre part, si $x, y \in I + J$, écrivant $x = i + j$, et $y = i' + j'$, on a $x - y = (i - i') + (j - j') \in I + J$ puisque $i - i' \in I$ et $j - j' \in J$.
D'autre part, pour $a \in A$, on a, par distributivité de $\times$ par rapport $+$: $ax = ai + aj \in I + J$ puisque, I et J étant deux idéaux, $ai \in I$ et $aj \in J$. Ceci prouve que $I+J$ est un idéal.

2. On a $P = X^2(X+i)(X-i)$. Or $Q = X^2(X^4 + X^2 - X) - X$ avec $deg(X) < deg(X^2)$: le reste de la division euclidienne de Q par X^2 est non nul. Ainsi X^2 et donc P, ne divisent pas Q.
Concernant $\mathsf{pgcd}(P,Q)$, on a $Q(0) = 0$, $Q(i) = 0$ et donc, Q étant à coefficients réels, $Q(-i) = Q(\bar{i}) = \overline{Q(i)} = 0$. Ceci montre que $X(X-i)(X+i)$ est un diviseur commun à P et Q (ces 3 monômes étant deux à deux premiers entre eux) et donc $\mathsf{pgcd}(P,Q) = X(X-i)(X+i)$ puisque P ne divise pas Q.

3. Ces deux polynômes ne sont pas premiers entre eux : par exemple, $P(1) = Q(1) = 0$ et donc $X-1$ divise P et Q.
On sait que P admet dans $\mathbb{C}$, 6 racines simples et puisque toute racine w de P vérifie $w^6 = 1$, elle satisfait $(w^6)^{10} = w^{60} = 1$ et donc c'est une racine de Q. Par suite $P|Q$ et donc $\mathsf{pgcd}(P,Q) = P$.

4. Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ tant ceux de degré un et ceux de degré deux non factorisables, $P = X^4 + 1$ est réductible.

Exercice 2.

1. Puisque P est unitaire et de degré 3, il est de la forme $P = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$. Par ailleurs, admettant a, b et c pour racines, il vérifie $P = (X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$. Il suffit alors d'identifier les coefficients pour obtenir que
$$a_2 = -a-b-c, \quad a_1 = ab+ac+bc \text{ et } a_0 = -abc$$

2. (a) De la question précédente, on déduit que x, y et z sont des racines du polynôme Q ssi
$$-x-y-z = -2, \quad xy+xz+yz = -\frac{1}{4} \text{ et } -xyz = \frac{1}{2}$$
Or, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz+xz+xy}{xyz}$ et donc
$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y+z & = & 2 \\ xyz & = & -\frac{1}{2} \\ xy+xz+yz & = & -\frac{1}{4} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x+y+z & = & 2 \\ xyz & = & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} & = & -\frac{1}{4xyz} = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$
ce qui prouve le résultat.

(b) On a $Q(\frac{1}{2}) = 0$ et donc $(X - \frac{1}{2})|Q$.
La division euclidienne de Q par $(X - \frac{1}{2})$ donne alors $Q = (X - \frac{1}{2})(X^2 - \frac{3}{2}X - 1) = (X - \frac{1}{2})(X + \frac{1}{2})(X - 2)$ et les racines de Q sont donc $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et 2.

(c) Si (x, y, z) est solution de (S) alors toute permutation de ces trois nombres est encore solution et on obtient pour ensemble de solutions

$$\mathscr{S} = \left\{\Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\Big), \Big(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\Big), \Big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\Big), \Big(\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}\Big), \Big(2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big), \Big(2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big)\right\}$$

Exercice 3.

($\Longrightarrow$) Supposons que $P \mid AB$ donc $\exists Q_1 \in \mathbb{K}[X]$, $AB = PQ_1$.
Par le théorème de Bezout, il existe U_1, V_1 et U_2, V_2 polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $D_1 = U_1P + V_1A$ et $D_2 = U_2P + V_2B$ et donc $D_1D_2 = P\{U_1(U_2P + V_2B) + V_1AU_2\} + V_1V_2AB$. Ainsi il existe Q_1, Q_2 tels que $D_1D_2 = PQ_2 + V_1V_2PQ_2 = Q_3P$ et donc $P|D_1D_2$.

($\Longrightarrow$) Supposons que $P|D_1D_2$.
Puisque $D_1 = \mathsf{pgcd}(P, A)$, on a en particulier $D_1|A$ et de même par $D_2 = \mathsf{pgcd}(P, B)$, on a $D_2|B$. Par conséquent $D_1D_2|AB$ et donc si $P|D_1D_2$, on a bien $P|AB$.

Exercice 4.

1. On procède par récurrence.
◇ Pour $n = 0$: $H_0 = 1$ qui est bien de degré 0.
◇ Supposons qu'il existe $H_k \in \mathbb{R}[X]$, de degré au plus $k \leq n - 1$, tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^{-x^2})^{(k)} = (-1)^k e^{-x^2} H_k(x)$$
Dérivant le relation, on obtient
$$(e^{-x^2})^{(k+1)} = (-1)^k(-2xe^{-x^2}H_k(x) + e^{-x^2}H'_k(x)) = (-1)^{k+1}e^{-x^2}H_{k+1}(x)$$
en posant $H_{k+1} = 2XH_k - H'_k \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie $deg(H_{k+1}) \leq deg(XH_k) = deg(H_k) + 1 \leq k+1$.

2. Supposons que pour n donné il existe deux polynômes H_n et K_n. Alors, par différence, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-1)^n e^{-x^2}(H_n(x) - K_n(x)) = 0$ et donc $H_n = K_n$ puisqu'alors, $H_n - K_n \in \mathbb{R}[X]$ est de degré au plus n et admet (plus de) $n + 1$ racines.

3. On a $H_0 = 1$, $H_1 = 2X$ et $H_2 = 4X^2 - 2$.

4. On procède par récurrence, l'initialisation étant donnée par la question précédente.
Supposons qu'il existe n tel que $H'_n = 2nH_{n-1}$.
Dérivant la relation $(e^{-x^2})^{(n)} = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x)$, on obtient
$$(e^{-x^2})^{(n+1)} = (-2xe^{-x^2})^{(n)} = (-1)^n e^{-x^2}(-2xH_n(x) + H'_n(x))$$
et donc, compte tenu de l'indication (application de la formule de Leibniz),
$$-2x(e^{-x^2})^{(n)} - 2n(e^{-x^2})^{(n-1)} = (-1)^n e^{-x^2}(-2xH_n(x) + H'_n(x))$$
à savoir
$$\begin{aligned}(-1)^n e^{-x^2} H'_n(x) &= 2x\Big((-1)^n e^{-x^2} H_n(x) - (e^{-x^2})^{(n)}\Big) - 2n(e^{-x^2})^{(n-1)} \\ &= -2n(e^{-x^2})^{(n-1)} \\ &= -2n(-1)^{n-1}e^{-x^2}H_{n-1}(x)\end{aligned}$$
et donc $H'_n = 2nH_{n-1}$.
La propriété est donc vraie par récurrence.

5. On a $(e^{-x^2})^{(n+1)} = -2x(e^{-x^2})^{(n)} - 2n(e^{-x^2})^{(n-1)}$ et donc

$$(-1)^{n+1}e^{-x^2}H_{n+1} = -2x(-1)^n e^{-x^2}H_n - 2n(-1)^{n-1}e^{-x^2}H_{n-1}$$

   à savoir $H_{n+1} = 2XH_n - 2nH_{n-1}$.

6. On a $H_{n+1} = 2XH_n - 2nH_{n-1} = 2XH_n - H'_n$ et donc, par dérivation, $H'_{n+1} = 2H_n + 2XH'_n - H''_n$ ce qui implique $2(n+1)H_n = 2H_n + 2XH'_n - H''_n$ i.e. $H''_n - 2XH'_n + 2nH_n = 0$.

Exercice 5.

1. Evident.

2. Evident.

3. Evident.

4. (a) On déduit de la question précédente que $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{P(\frac{\alpha+\beta}{2})}{P'(\frac{\alpha+\beta}{2})}$.

   (b) Notant $\theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$, il s'agit de la droite d'équation : $y = P'(\theta)(X-\theta) + P(\theta)$.

   (c) $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(\theta)}{k!}(X-\theta)^k$.

   (d) L'abscisse du point d'intersection de T avec la courbe de $x \longmapsto P(x)$ est solution de

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(\theta)}{k!}(x-\theta)^k = P'(\theta)(x-\theta) + P(\theta)$$

   donc

$$\frac{P^{(2)}(\theta)}{2}(x-\theta)^2 + \frac{P^{(3)}(\theta)}{6}(x-\theta)^3 = 0$$

   donc $x = \theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$ ou $x = \gamma$.

5. Dans ce cas, $P'(\frac{\alpha+\beta}{2}) = -(\frac{\alpha-\beta}{2})^2 = 0$ et la tangente est donc horizontale.