

EDP et approximation
ENSMM, parcours SYSTEMES

Enseignants : Nathaël Alibaud et Roberta Tittarrelli

Version de 2017-2018

Table des matières

Préface	5
1 Modélisation et classification des EDP	7
1.1 Un exemple de modèle	7
1.2 Conditions initiales et aux limites	12
1.3 Quelques EDP classiques	15
1.4 Classification des EDP	17
2 Analyse qualitative des EDP	21
2.1 EDP elliptiques, équation de Poisson	21
2.2 EDP paraboliques, équation de la chaleur	30
2.3 EDP hyperboliques d'ordre 1, transport	48
2.4 EDP hyperboliques d'ordre 2, ondes	55
3 Analyse numérique des EDP	67
3.1 Méthode des différences finies (MDF)	67
3.2 Méthode des éléments finis (MEF)	87
Bibliographie	99

Préface

Ce polycopié est une introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles (linéaires du second ordre) et à leur approximation (différences finies, éléments finis). Il est constitué des notes d'un cours donné à l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques (ENSMM). Il est largement inspiré des ouvrages [1, 2, 3, 4], surtout la présentation de l'équation de la chaleur dans le premier chapitre qui est issu de [2].

Chapitre 1

Modélisation et classification des EDP

1.1 Un exemple de modèle

(Tournez la page.)

EDP et approximation

Partie 1: Modélisation et classification des EDP

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables, par exemple $u = u(x_1, \dots, x_d)$, et qui fait intervenir des dérivées partielles comme $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, etc. Ces équations viennent de la physique, etc. Parfois u dépend aussi du temps t .

I) Un exemple de modèle

Décrivons le modèle physique qui a conduit à l'équation de la chaleur. On considère un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ (en général $d = 1, 2$ ou 3) occupé par un matériau homogène, isotrope, et conducteur de chaleur. On note $x = (x_1, \dots, x_d)$ sa variable.



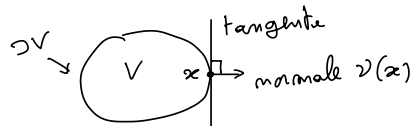
On note f les sources de chaleur dans Ω , supposées connues.

Elles peuvent dépendre de x et de t , ce qui donne un champ de scalaires

$$f: (x, t) \mapsto f(x, t) \in \mathbb{R}.$$

On note $u = u(x, t)$ la température, qui est proportionnelle à la quantité de chaleur. Cette dernière vaut cu , pour une certaine constante physique $c > 0$. Soit maintenant $V \subseteq \Omega$ arbitraire. On note ∂V son bord et $\nu = \nu(x)$ la normale

unitaire extérieure :



("unitaire" signifie que $\nu(x) \in \mathbb{R}^d$ est de norme 1).

On appelle V un volume et ∂V une surface, comme c'est le cas pour $d=3$. La loi de conservation de l'énergie dit que :

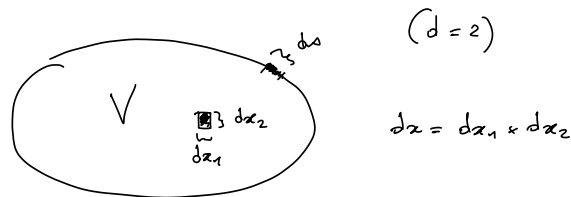
La variation en temps de la quantité de chaleur dans V est le bilan de ce qui est produit par les sources et de ce qui sort à travers ∂V .

C'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V c u \, dx \right) = \int_V f \, dx - \int_{\partial V} q \cdot \nu \, ds$$

où $q = q(x, t)$ est le vecteur flux de chaleur, dx l'élément

de volume et ds celui de surface :



Le flux de chaleur est un champ de vecteurs de \mathbb{R}^d et $q \cdot \nu$

est le produit scalaire entre q et ν . Pour continuer, on utilise le

théorème de la divergence disant que

$$\int_{\partial V} q \cdot \nu \, ds = \int_V \operatorname{div}(q) \, dx,$$

où div est la divergence en x :

$$\operatorname{div}(q) = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial q_d}{\partial x_d}$$

avec $q = (q_1, \dots, q_d)$. De plus,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V c u \, dx \right) = \int_V c \frac{\partial u}{\partial t} \, dx$$

et donc

$$\int_V \left(c \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(q) \right) dx = \int_V f \, dx \quad \forall V \subseteq \Omega.$$

Puisque V est arbitraire,

$$c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(q)(x, t) = f(x, t)$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout temps t . Pour relier q à u , on utilise la loi constitutive de Fourier. Elle fait intervenir le gradient (en x) de u :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right).$$

C'est un champ de vecteurs dirigé dans le sens où u croît le plus. La loi de Fourier dit que

$$q = -k \nabla u$$

pour une certaine constante physique $k > 0$. Elle signifie que :

La "chaleur" se propage des endroits les plus chauds vers les plus froids.

On obtient l'équation de la chaleur

$$c \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \Delta u(x, t) = f(x, t)$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout temps t , où

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$$

est le Laplacien (en x) de u .

1.2 Conditions initiales et aux limites

(Tournez la page.)

II) Conditions initiales et aux limites

On doit encore préciser ce qu'il se passe au bord $\partial\Omega$ et au temps initial ($t=0$ par convention). On suppose connaître u à cet instant, c'est-à-dire

$$u(x, t=0) = u_0(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

pour $u_0 = u_0(x)$ connue et on a

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$$

est la fermeture de Ω . La condition au bord dépend du cont. exte physique. Voici des exemples.

(a) Si le matériau est plongé dans un milieu à température constante (0 par exemple), alors

$$u(x, t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0.$$

C'est une condition de Dirichlet (homogène).

(b) Si le matériau est isolé thermiquement, le flux de chaleur sortant est nul, c'est-à-dire $q \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$.



Par la loi de Fourier, on obtient une condition de

Neuman (homogène)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall t > 0,$$

avec la dérivée normale (en x):

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu.$$

Supposons que l'on soit dans le premier cas. Le problème

complet est alors de trouver $u: \bar{\Omega} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} c \frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = f & \forall x \in \Omega, \forall t > 0, & \text{(EDP)} \\ u(x, t) = 0 & \forall x \in \partial\Omega, \forall t > 0, & \text{(condition au bord)} \\ u(x, t=0) = u_0(x) & \forall x \in \bar{\Omega}, & \text{(condition initiale)} \end{cases}$$

où $f: \Omega \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $u_0: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ sont données,

ainsi que $c > 0$ et $k > 0$.

Cela s'appelle un problème aux limites, à cause de la

condition au bord, mais aussi un problème de Cauchy,

à cause de la condition initiale.

1.3 Quelques EDP classiques

(Tournez la page.)

III) Quelques EDP classiques

Dans la suite, on adimensionnera souvent les EDP, ce qui revient à

prendre $c = k = 1$ dans l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f.$$

Cette EDP modélise plus généralement des phénomènes de diffusion.

La version stationnaire est l'équation de Poisson

$$-\Delta u = f$$

(équilibre où $u = u(x)$ et $f = f(x)$ ne dépendent pas du temps).

Si f est identiquement nulle (noté $f \equiv 0$), on l'appelle l'équation

de Laplace. Citons aussi l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f,$$

qui modélise des propagations d'ondes ou des vibrations. Et

pour finir cette (courte) liste, mentionnons l'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla u = f.$$

(u pouvant être par exemple la quantité d'un polluant dans un fluide animé d'une vitesse v).

1.4 Classification des EDP

(Tournez la page.)

IV) Classification des EDP

On doit différencier les EDP des EDO (équations différentielles ordinaires), comme par exemple $\frac{du}{dt} = F(u)$ où $u = u(t)$ ne dépend que d'une variable. Il n'y a pas de théorème général d'existence et d'unicité pour les EDP. La méthode dépend du type de l'équation. On se restreindra aux EDP linéaires (en fait affines) d'ordre ≤ 2 (ie avec un ordre maximal de dérivation ≤ 2). Voici leur classification :

(a) Une EDP elliptique est de la forme

$$-\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \text{"dérivées d'ordre inférieurs"},$$

où $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ est définie positive. Ce sont des équations d'équilibre où $u = u(x)$.

(b) Une EDP parabolique est de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \text{"dérivées d'ordre inférieurs"},$$

avec (a_{ij}) comme ci-dessus.

(c) Une EDP hyperbolique d'ordre 1 est de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \text{"dérivées d'ordre infiniem"}$$

(d) Une EDP hyperbolique d'ordre 2 est de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \text{"dérivées d'ordre infiniem"}$$

(avec a_{ij} toujours comme en (a)).

Les EDP modèles pour chacun de ces types sont respectivement celles de Poisson, de la chaleur, du transport et des ondes.

Chapitre 2

Analyse qualitative des EDP

2.1 EDP elliptiques, équation de Poisson

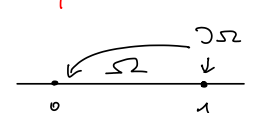
(Tournez la page.)

Partie 2 : Analyse qualitative des EDP

Cette partie est une introduction à la théorie des EDP. On ne considère que des EDP modèles précédentes en dimension d'espace $d = 1$.

I) EDP elliptiques, équation de Poisson

Dans cette section, on se concentre sur le problème

$$(E) \quad \begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2}(x) = f(x) \quad \forall x \in]0,1[, & \text{(Eq. de Poisson)} \\ u(0) = u(1) = 0. & \text{(Dirichlet au bord)} \end{cases}$$


Le domaine est $\Omega =]0,1[$, son bord est $\partial\Omega = \{0,1\}$, et la source $f = f(x)$ est donnée. On se demande si il existe au moins une solution u et si elle est unique?

Remarque

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \Delta u \text{ est le Laplacien en dimension } d=1.$$

Remarque

(E) n'est pas un problème de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2} = f & \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\text{EDP}) \\ u(0) = \alpha, \quad \frac{du}{dx}(0) = \beta & (\text{conditions initiales en } x=0) \end{cases}$$

(α, β donnés). C'est un problème aux limites, comme pour une EDP.

I.1) Principe du maximum

Voici l'une des plus importantes propriétés du Laplacien.

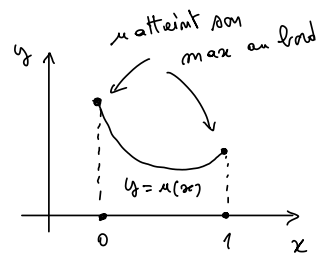
Lemme (principe du max)

Soit $u \in C^\infty([0,1])$ tel que

$$-\frac{d^2 u}{dx^2}(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0,1[.$$

Alors pour tout $x \in [0,1]$,

$$u(x) \leq \max\{u(0), u(1)\}.$$



Remarque

Si $-\frac{d^2 u}{dx^2} \geq 0$ alors u atteint son minimum au bord.

Exercice (interprétation physique)

Considérons le modèle de la chaleur à l'équilibre

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2} = f & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) = \alpha & \text{et } u(1) = \beta, \end{cases}$$

avec une source $f = f(x) \geq 0$ et des températures données au bord $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$. Montrez qu'alors $u \geq 0$ sur tout le domaine $[0,1]$.

La notation " $u \in C^\infty([0,1])$ " signifie que u est une fonction $u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui est indéfiniment dérivable. On peut supposer moins, mais pour simplifier, on se placera toujours dans des cadres où les solutions sont très régulières.

Preuve du lemme

Soit $\varepsilon > 0$ et notons $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon x^2$. On a

$$(1) \quad -\frac{d^2 u_\varepsilon}{dx^2} = -\frac{d^2 u}{dx^2} - 2\varepsilon < 0 \quad \text{dans }]0,1[.$$

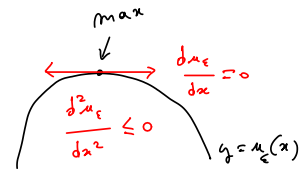
De plus, u_ε est une fonction continue de $[0,1]$ dans \mathbb{R} . Elle atteint donc son maximum (car $[0,1]$ est fermé et borné), ie

$\exists x_0 \in]0,1[$ tel que $\forall x \in]0,1[$, $u_\epsilon(x) \leq u_\epsilon(x_0)$.

Si $x_0 \in]0,1[$, on a

(2)

$$\frac{du_\epsilon}{dx}(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2u_\epsilon}{dx^2}(x_0) \leq 0$$



(Ce sont les conditions nécessaires d'optimalité). Mais (1) et (2)

sont incompatibles. Donc $x_0 = 0$ ou 1 , et

$$u_\epsilon(x) \leq \max \{ u_\epsilon(0), u_\epsilon(1) \} \quad \forall x \in]0,1[, \quad \forall \epsilon > 0.$$

C'est-à-dire

$$u(x) \leq \max \{ u(0), u(1) + \epsilon \} - \epsilon x^2 \quad \forall x \in]0,1[, \quad \forall \epsilon > 0.$$

On conclut le lemme à la limite en $\epsilon \rightarrow 0$. \blacksquare

(fin de preuve)

Voici une conséquence immédiate :

Exercice (unicité d'une solution)

Soit $f \in C^\infty([0,1])$ et supposons que (\mathcal{E}) admette deux solutions

$u, v \in C^\infty([0,1])$.

1) Montrez que $w = u - v$ satisfait $-\frac{d^2w}{dx^2} = 0$ dans $]0,1[$.

2) En déduire que $u(x) = v(x) \quad \forall x \in [0,1]$.

I. 2) Formule de représentation de Green

Montrons maintenant l'existence. Supposons donc que $f = f(x)$ est une source donnée et cherchons $u = u(x)$ satisfaisant

$$(E) \quad \begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2} = f & \text{dans }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On raisonne formellement pour simplifier. Pour avoir l'EDP, on choisit u comme une primitive seconde de $-f$. Cela veut dire

qu'on choisit $\frac{du}{dx}$ de la forme

$$\frac{du}{dx}(x) = -\int_0^x f(y) dy + a,$$

pour une certaine constante $a \in \mathbb{R}$, et donc u de la forme

$$(3) \quad u(x) = -\overbrace{\int_0^x \left(\int_0^{\tau} f(y) dy \right) d\tau}^{\text{noté } I} + ax + b,$$

pour une autre constante $b \in \mathbb{R}$. Il reste à choisir a et b pour

avoir la condition au bord. Auparavant, on remarque que

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_{\{y \leq \tau \leq x\}} f(y) dy d\tau$$

avec la notation suivante :

$$\mathbb{1}_{\{y \leq r \leq x\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } y \leq r \leq x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En changeant l'ordre des variables d'intégration,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \mathbb{1}_{\{y \leq r \leq x\}} f(y) dr \right) dy \\ &= \int_0^1 f(y) \left(\int_y^x dr \right) \mathbb{1}_{\{y \leq x\}} dy. \end{aligned}$$

La fonction de (3) peut donc s'écrire sous la forme

$$(4) \quad u(x) = \int_0^1 f(y) (x-y) \mathbb{1}_{\{y \leq x\}} dy + ax + b.$$

Rappelons qu'elle satisfait l'EDP de (2) et qu'il reste à choisir

a et b pour avoir $u(0) = u(1) = 0$. On

$$\begin{cases} u(0) = \int_0^1 f(y) (-y) \mathbb{1}_{\{y \leq 0\}} dy + b = b, \\ u(1) = - \int_0^1 f(y) (1-y) dy + a + b. \end{cases}$$

$\overset{=0 \text{ si } y > 0}{\mathbb{1}_{\{y \leq 0\}}}$

Preons donc $b=0$ et $a = \int_0^1 f(y) (1-y) dy$ dans (4), i.e

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_0^1 f(y) (x-y) \mathbb{1}_{\{y \leq x\}} dy + \int_0^1 f(y) x(1-y) dy \\ &= \int_0^1 f(y) \underbrace{\left(x(1-y) - (x-y) \mathbb{1}_{\{y \leq x\}} \right)}_{\text{note } G(x,y)} dy. \end{aligned}$$

$$G(x,y) = \begin{cases} x(1-y) - (x-y) = y(1-x) & \text{si } y \leq x \\ x(1-y) & \text{sinon} \end{cases}$$

En admettant que ce u est C^∞ , on vient de montrer que :

Théorème (existence)

Soit $f \in C^\infty([0,1])$. Alors il existe une (unique) solution

$u \in C^\infty([0,1])$ de (E), qui est

$$u(x) = \int_0^1 f(y) G(x,y) dy \quad \forall x \in [0,1],$$

où

$$G(x,y) = \begin{cases} y(1-x) & \text{si } y \leq x, \\ x(1-y) & \text{sinon,} \end{cases}$$

s'appelle la fonction de Green du problème.

Notons que la fonction de Green dépend de l'EDP, mais aussi

des conditions aux limites. En effet:

Exercice (Dirichlet + Neuman)

Soit $f \in C^\infty([0,1])$. Vous admettez qu'il existe une unique

solution $u \in C^\infty([0,1])$ au problème

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2}(x) = f(x) & \forall x \in]0,1[, & \text{(Poisson)} \\ u(0) = 0 & \text{et} & \frac{du}{dx}(1) = 0. \\ & \text{(Dirichlet)} & \text{(Neuman)} \end{cases}$$

Montrez qu'elle satisfait

⋮

:

$$u(x) = \int_0^1 f(y) H(x, y) dy \quad \forall x \in [0, 1],$$

avec la nouvelle fonction de Green

$$H(x, y) = \begin{cases} y & \text{si } y \leq x, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.2 EDP paraboliques, équation de la chaleur

(Tournez la page.)

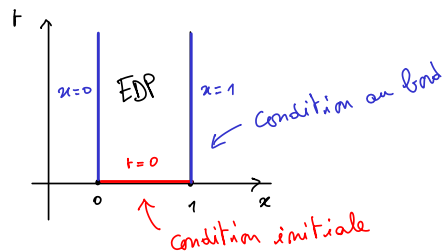
II) EDP paraboliques, équation de la chaleur

Dans cette section, on se concentre sur le problème

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \quad (\text{Eq. chaleur}) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t > 0, \quad (\text{Dirichlet au bord}) \\ u(x, t=0) = u_0(x) & \forall x \in [0,1]. \quad (\text{condition initiale}) \end{cases}$$

Le domaine physique est encore $\Omega =]0,1[$, d'où $\partial\Omega = \{0,1\}$, $u_0 = u_0(x)$

est donnée et l'inconnue est une fonction $u: \underset{\text{espace}}{[0,1]} \times \underset{\text{temps}}{[0,+\infty[} \rightarrow \mathbb{R}$.



II.1) Principe du maximum

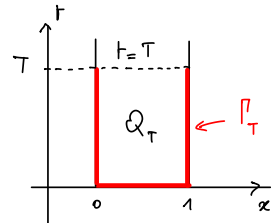
On a encore un principe du max, mais le temps t joue un rôle particulier. Pour le voir, considérons le domaine

$$Q_T =]0,1[\times]0,T[\subseteq \mathbb{R}^2,$$

où $T > 0$ est fixé. Notons $\bar{Q}_T = [0,1] \times [0,T]$ sa fermeture et

$$\Gamma_T = \partial Q_T \setminus \{(x,t) \mid t=T\}$$

sa frontière parabolique.



Lemme (principe du max)

Soient $T > 0$ et $u \in C^\infty(\bar{Q}_T)$ tels que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0 \quad \text{dans } Q_T.$$

Alors u atteint son max sur la frontière parabolique, i.e

$$\underbrace{\max_{\bar{Q}_T} u}_{\text{valeur max prise par } u \text{ sur } \bar{Q}_T} \leq \underbrace{\max_{\Gamma_T} u}_{\text{valeur max prise par } u \text{ sur } \Gamma_T}.$$

Exercice (unicité)

1) Démontrez le lemme en vous inspirant de la preuve de

l'elliptique avec $u_\epsilon(x,t) = u(x,t) - \epsilon$.

2) En déduire que si $u_0 \in C^\infty([0,1])$, alors (S) admet au

plus une solution $u \in C^\infty([0,1] \times [0,+\infty[)$.

II.2) Méthode spectrale

Nous allons construire une solution à (S) en imitant la méthode de diagonalisation d'un système différentiel.

II.2.a) Principe général

Rappelons d'abord cette méthode pour le système

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{dt}(t) + a_{11}u_1(t) + \dots + a_{1N}u_N(t) = 0 \quad \forall t > 0, \\ \vdots \\ \frac{du_N}{dt}(t) + a_{N1}u_1(t) + \dots + a_{NN}u_N(t) = 0 \quad \forall t > 0, \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ (N \text{ équ. diff.}) \end{array}$$

(+ conditions initiales)

où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sont donnés et les $u_i \in C^0([0, +\infty[)$ sont inconnues.

On écrit $A = (a_{ij})$ et $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$, d'où

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dt} + AU = 0 \quad \forall t > 0, \quad (EDO) \\ (+ \text{condition initiale}) \end{array} \right.$$

Si A est diagonalisable (sur \mathbb{R}), on peut considérer une base

(ϕ_1, \dots, ϕ_N) de \mathbb{R}^N constituée de vecteurs propres, ie tels que

$$A\phi_m = \lambda_m \phi_m \quad \forall m = 1, \dots, N,$$

pour certains réels λ_m (les valeurs propres). On écrit alors

$$U(t) = \sum_{m=1}^N b_m(t) \phi_m,$$

où les coordonnées $b_m(t) \in \mathbb{R}$. Puisque A devient diagonale sur

cette base,

N équations découplées (faciles à résoudre)

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{db_m}{dt} + \lambda_m b_m = 0 \quad \forall m = 1, \dots, N \right].$$

Cas des EDP

On veut appliquer cette méthode au problème (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \quad (\text{EDP}) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad (\text{Dirichlet homogène}) \\ (+ \text{condition initiale.}) \end{array} \right.$$

Par analogie, on va remplacer la matrice A par le Laplacien $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

et chercher une solution sous la forme

$$u(x,t) = \sum_m b_m(t) \phi_m(x),$$

où les $\phi_m = \phi_m(x)$ seront des fonctions propres du Laplacien.

La condition au bord sera alors équivalente à

$$\sum_m b_m(t) \phi_m(0) = \sum_m b_m(t) \phi_m(1) = 0 \quad \forall t > 0.$$

Pour la satisfaire, on demande à avoir

$$\phi_m(0) = \phi_m(1) = 0 \quad \forall t > 0, \forall m.$$

On ne s'intéresse donc qu'aux fonctions propres ci-dessous:

Définition (fonctions propres)

On dit que $\phi \in C^\infty([0,1])$ est fonction propre du Laplacien de

Dirichlet si $\phi \neq 0$ et si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(PVP) \quad \begin{cases} -\frac{d^2 \phi}{dx^2}(x) = \lambda \phi(x) & \forall x \in]0,1[, \quad (\text{Eq. Helmholtz}) \\ \phi(0) = \phi(1) = 0. & (\text{Dirichlet homogène}) \end{cases}$$

λ s'appelle la valeur propre associée à ϕ .

(PVP) s'appelle un problème aux valeurs propres et la terminologie

"Laplacien de Dirichlet" précise la condition au bord. Si on avait

Neuman dans (3), on ne s'intéresserait qu'aux fonctions propres

du Laplacien de Neuman. La suite de la méthode consiste à choisir

les ϕ_m et b_m pour que $u = \sum_m b_m \phi_m$ soit solution de (3).

II.2.b) Choix des $\phi_m = \phi_m(x)$

On procède exactement comme pour construire une base de vecteurs propres d'une matrice diagonalisable, i.e on doit

- (a) calculer les valeurs propres λ ,
- (b) les sous-espaces propres associés E_λ ,
- (c) choisir une base B_λ de chaque E_λ ,
- (d) puis prendre $\{\phi_m\}_m = \bigcup_\lambda B_\lambda$.

Lemme (calcul des λ et ϕ)

ϕ est une fonction propre du Laplacien de Dirichlet si et seulement

si il existe $m \in \mathbb{N}_*$ et $b \in \mathbb{R}_*$ tels que

$$\phi(x) = b \sin(\pi m x) \quad \forall x \in [0,1].$$

De plus, $\pi^2 m^2$ est la valeur propre associée à ϕ .

La preuve utilise le résultat de l'exercice ci-dessous.

Exercice (positivité des λ)

1) Montrez que si ϕ est une fonction propre associée à λ , alors

;

$$\vdots \quad \int_0^1 \left| \frac{d\phi}{dx}(x) \right|^2 dx = \lambda \int_0^1 \phi^2(x) dx.$$

2) Montrez que de plus $\int_0^1 \phi^2(x) dx > 0$ et $\int_0^1 \left| \frac{d\phi}{dx}(x) \right|^2 dx > 0$.

3) En déduire que $\lambda > 0$.

Preuve du lemme

(\Leftarrow) Soient $n \in \mathbb{N}_*$, $b \in \mathbb{R}_*$, et $\phi \in C^\infty([0,1])$ définie par

$$\phi(x) = b \sin(\pi n x).$$

Alors $\phi \neq 0$ et

$$\begin{cases} -\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) = \pi^2 n^2 b \sin(\pi n x) = \pi^2 n^2 \phi(x) \quad \forall x \in]0,1[, \\ \phi(0) = b \sin(0) = 0, \quad \phi(1) = b \sin(n\pi) = 0. \end{cases}$$

Par définition, ϕ est bien une fonction propre du Laplacien de Dirichlet (de valeur propre $\lambda = \pi^2 n^2$).

(\Rightarrow) Réciproquement, supposons que ϕ est fonction propre. Alors

$$\begin{cases} -\frac{d^2\phi}{dx^2}(x) = \lambda \phi(x) \quad \forall x \in]0,1[, \\ \phi(0) = \phi(1) = 0, \end{cases}$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après l'exercice précédent, $\lambda > 0$. Donc

en introduisant l'équation de ϕ ,

$$\phi(x) = a \cos(\sqrt{\lambda} x) + b \sin(\sqrt{\lambda} x),$$

pour certaines constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminons les avec les

conditions aux limites. On a

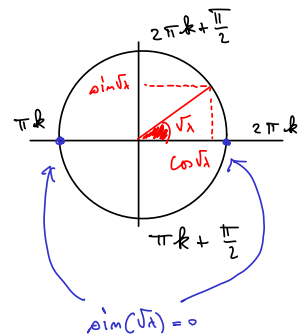
$$\begin{cases} \phi(0) = 0 = a \\ \phi(1) = 0 = a \cos(\sqrt{\lambda}) + b \sin(\sqrt{\lambda}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \sin(\sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases}$$

De plus $\phi \neq 0$ (par définition des fonctions propres). Donc $b \neq 0$ et

on déduit que $\lambda > 0$ satisfait $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$. On conclut que $\sqrt{\lambda} = \pi m$

pour un certain $m \in \mathbb{N}_*$ et que

$$\phi(x) = b \sin(\pi m x).$$



Conclaine (calcul des E_λ)

Les valeurs propres sont données par la suite $(\pi^2 m^2)_{m \geq 1}$ et leurs

sous-espaces propres associés par

$$\begin{aligned} E_{\pi^2 m^2} &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{fonction nulle} \} \cup \{ \text{fonctions propres associées à } \pi^2 m^2 \} \\ &= \left\{ b \phi_m \mid b \in \mathbb{R} \right\} = \underset{\text{vect}}{\text{vect}} \{ \phi_m \}, \end{aligned}$$

⋮

\vdots
 $|$ où $\phi_m(x) = \sin(\pi m x)$.

Chaque E_{λ_m} est donc un espace vectoriel de dimension 1, de base

$\mathcal{B}_{\lambda_m} = \{\phi_m\}$. La réunion

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \text{ valeurs propres}} \mathcal{B}_\lambda = \bigcup_{m \geq 1} \{\phi_m\}$$

est donc la famille que l'on cherchait. Cela nous donne toute une suite infinie $(\phi_m)_{m \geq 1}$ et suggère de chercher une solution de (\mathcal{P}) sous la forme d'une série

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} b_m(t) \underbrace{\sin(\pi m x)}_{= \phi_m(x)}.$$

II.2. c) Calcul des $b_m = b_m(t)$

Considérons maintenant $u_0 = u_0(x)$ et cherchons une solution de (\mathcal{P})

sous la forme ci-dessus. Pour simplifier, on raisonne formellement en

manipulant les séries comme des sommes finies. La condition au

bas est automatiquement satisfaite car

$$u(0,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t) \underbrace{\sin(0)}_0 = 0 \quad \forall t > 0$$

(idem en $x=1$).

Pour avoir l'EDP, il suffit de choisir $l_m = l_m(t)$ tels que

$$(5) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (l_m(t) \sin(\pi m x)) = 0 \quad \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \forall m \geq 1.$$

(En effet, par linéarité des dérivées $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, on aura

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (l_m(t) \sin(\pi m x)) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{+\infty} l_m(t) \sin(\pi m x) \right)}_{u(x,t)} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad \forall x \in]0,1[, \forall t > 0. \end{aligned}$$

Maintenant, on remarque que

$$\begin{aligned} (5) &\Leftrightarrow \left[\frac{d l_m(t)}{dt} \sin(\pi m x) + l_m(t) \pi^2 m^2 \sin(\pi m x) = 0 \quad \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \forall m \geq 1 \right] \\ &\Leftrightarrow \left[\left(\frac{d l_m(t)}{dt} + \pi^2 m^2 l_m(t) \right) \sin(\pi m x) = 0 \quad \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, \forall m \geq 1 \right] \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{d l_m(t)}{dt} + \pi^2 m^2 l_m(t) = 0 \quad \forall t > 0, \forall m \geq 1 \right] \\ &\Leftrightarrow \left[l_m(t) = l_m(0) e^{-\pi^2 m^2 t} \quad \forall t > 0, \forall m \geq 1 \right]. \end{aligned}$$

On vient de montrer qu'une fonction de la forme

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{+\infty} l_m(0) e^{-\pi^2 m^2 t} \sin(\pi m x)$$

(avec $l_m(0) \in \mathbb{R}$) satisfait l'EDP et la condition au bord de (P).

Choisissons les $l_m(0)$ pour avoir la condition initiale, ie tels que

$$u(x, t=0) = \sum_{m=1}^{+\infty} f_m(0) \sin(\pi m x) = u_0(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

On reconnaît une série de Fourier. Rappelons que :

Théorème (série de sinus)

Pour tout $v \in C^\infty([0, 1])$ telle que $v(0) = v(1) = 0$,

$$v(x) = \underbrace{\sum_{m=1}^{+\infty} c_m}_{\text{développement en série de sinus}} \underbrace{\sin(\pi m x)}_{\text{fonction propre } \phi_m} \quad \forall x \in [0, 1],$$

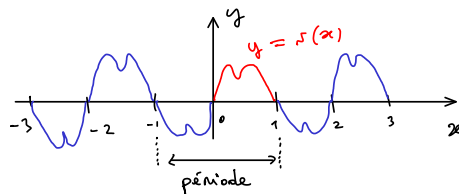
avec les coefficients de Fourier

$$c_m = 2 \int_0^1 v(y) \sin(\pi m y) dy \quad \forall m \geq 1.$$

Remarque

Un tel développement s'obtient en prolongeant d'abord v par

impairité sur $[-1, 1]$, puis par 2-périodicité sur \mathbb{R} .



Le développement en série de Fourier de cette fonction est donc

$$v(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m \sin(\pi m x) + \frac{d_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} d_m \cos(\pi m x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\vdots \quad \text{où } c_n = \int_{-1}^1 r(y) \sin(\pi n y) dy \text{ et } d_m = \int_{-1}^1 r(y) \cos(\pi m y) dy.$$

Tout les d_m sont nuls par imparité de r (prolongée sur \mathbb{R}) et on retrouve bien le développement du théorème précédent.

Remarque

La condition " $r(0) = r(1) = 0$ " permet d'avoir un développement valide aussi en $x=0$ et 1 , avec une série de fonctions qui converge "très bien". On suppose que r_0 la satisfait pour éviter de discuter des questions délicates de convergence.

Remarque (relations d'orthogonalité)

Les fonctions propres de base $\phi_m(x) = \sin(\pi m x)$ satisfont

$$\underbrace{\int_0^1 \phi_m(x) \phi_n(x) dx}_{\text{produit scalaire de fonctions}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n, \end{cases}$$

pour tout $n, m \geq 1$. On dit qu'elles sont orthogonales 2 à 2. Cette relation permet de retrouver facilement les coefficients c_n du développement de r . En effet, pour écrire r sous la forme

∴ d'une série $v = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m \phi_m$, on doit avoir

$$\int_0^1 v(x) \phi_m(x) dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \phi_n(x) \right) \phi_m(x) dx$$

$$\stackrel{\substack{\text{linéarité} \\ \text{de l'intégrale}}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \underbrace{\int_0^1 \phi_n(x) \phi_m(x) dx}_{\substack{1 \\ 1/2 \text{ seulement si } n=m}}$$

$$= \frac{c_m}{2} \quad \forall m \geq 1.$$

II. 2. d) Conditions de compatibilité

On vient de montrer formellement que la fonction

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m e^{-\pi^2 m^2 t} \sin(\pi m x),$$

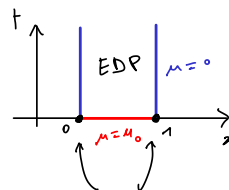
avec $c_m = 2 \int_0^1 u_0(y) \sin(\pi m y) dy$, est une solution de (P). Posons

maintenant la question de sa régularité. Pour faire simple, on

voudrait que $u \in C^\infty([0, 1] \times [0, +\infty[)$. Mais pour cela, la

condition initiale u_0 doit être "compatible" avec celle au bord

aux points $(x=0, t=0)$ et $(x=1, t=0)$:



points de rencontre entre les deux conditions

On a déjà vu que la série converge bien si $u_0(0) = u_0(1) = 0$.

C'est en fait une condition nécessaire pour que u soit continue aux points de rencontre ci-dessus et on a même besoin de plus pour qu'elle soit C^∞ . En effet :

Lemme (condition nécessaire)

Supposons que $u \in C^\infty([0,1] \times]0, +\infty[)$ satisfait l'EDP et la condition au bord de (\mathcal{P}) et notons $u_0(x) = u(x, t=0)$. Alors

$$(CP) \quad u_0^{(2m)}(0) = u_0^{(2m)}(1) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Preuve

Puisque u est continue et que $u(0, t) = u(1, t) = 0$ pour tout $t > 0$,

on a aussi $u(0, 0) = u(1, 0) = 0$ en $t = 0$. Mais alors

$$u_0(0) = u(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad u_0(1) = u(1, 0) = 0,$$

d'après la condition initiale. Cela montre le résultat pour $m=0$.

Pour $m=1$, on remarque que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(1, t) = 0 \quad \forall t > 0,$$

étant donné que $u(0, t) = u(1, t)$ pour tout $t > 0$. D'après l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et la continuité de $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, on a donc aussi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1, t) = 0 \quad \forall t > 0.$$

Toujours par continuité, on obtient que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1, 0) \quad \text{en } t=0.$$

On $u(x, t=0) = u_0(x)$, pour tout $x \in [0, 1]$, d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0) = u_0''(0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1, 0) = u_0''(1).$$

On en déduit que

$$u_0''(0) = u_0''(1) = 0,$$

ce qui montre le résultat pour $m=1$.

Pour $m \geq 2$, on dérive d'abord l'EDP puis on raisonne de la même manière. ▣

La condition (CP) est une condition de compatibilité. On dit que la donnée initiale u_0 est bien préparée lorsqu'elle est satisfait. On admet que si c'est le cas, tout les calculs

précédents sont justifiés et $u \in C^\infty([0,1] \times [0, +\infty[)$.

III.2.e) Conclusion

Théorème (existence)

Soit $u_0 \in C^\infty([0,1])$ satisfaisant (CP). Alors il existe une

(unique) solution $u \in C^\infty([0,1] \times [0, +\infty[)$ de (P), qui est

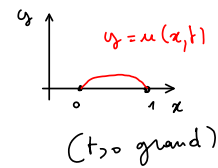
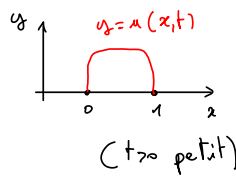
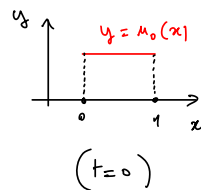
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin(\pi n x) \quad \forall x \in [0,1], \forall t \geq 0,$$

où $C_n = 2 \int_0^1 u_0(y) \sin(\pi n y) dy$.

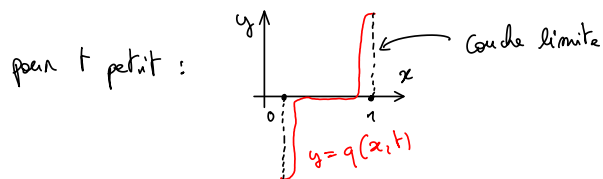
Remarque

Sans (CP), u est moins régulière en $(0,0)$ ou $(1,0)$. On dit qu'on

a une couche limite. Si par exemple $u_0 \equiv 1$, alors



d'où le flux de température $q(x,t) = -\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ s'accumule sur le bord



Remarque

On peut voir que $\overbrace{\int_0^1 u^2(x,t) dx}^{\text{énergie à l'instant } t} \leq e^{-\pi^2 t} \overbrace{\int_0^1 u_0^2(x) dx}^{\text{énergie initiale}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

(en appliquant l'égalité de Parseval sur les séries de Fourier).

On dit que le système est dissipatif.

Remarque

En intervertissant les signes Σ et \int , on a aussi:

$$u(x,t) = \int_0^1 k(x,y,t) u_0(y) dy,$$

avec la fonction de Green (version parabolique) :

$$k(x,y,t) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi^2 n^2 t} \sin(\pi n x) \sin(\pi n y).$$

2.3 EDP hyperboliques d'ordre 1, transport

(Tournez la page.)

III) EDP hyperboliques d'ordre 1, transport

Reprenons le modèle de la chaleur, où le milieu $\Omega \in \mathbb{R}^d$ n'est plus un matériau immobile, mais un fluide animé d'une vitesse

$V = V(x, t)$. Cela donne une nouvelle équation :

$$c \frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{c V \cdot \nabla u}_{\text{transport}} - \underbrace{k \Delta u}_{\text{diffusion}} = 0$$

(c, k étant les mêmes constantes physiques). La balance entre la diffusion et la convection est mesurée par le nombre de Péclet

$$Pe = \frac{c V L}{k}$$

(où L est par exemple le diamètre de Ω). Si Pe est très grand,

on néglige la diffusion, ce qui donne l'équation de transport

$$c \left(\frac{\partial u}{\partial t} + V \cdot \nabla u \right) = 0.$$

Continuons en supposant que $d=1$ et $\Omega = \mathbb{R}$, pour simplifier. La

température est alors solution du problème modèle

(P1)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, & \text{(Eq. transport)} \\ u(x, t=0) = u_0(x) & \forall t > 0, & \text{(condition initiale)} \end{cases}$$

où $u_0 = u_0(x)$ est donnée (et où il n'y a pas de condition au bord puisque $\mathbb{R} = \phi$).

Dans la suite, on admet que si sous des "bonnes hypothèses", on a un principe du maximum et (5.1) admet une unique solution. Calculons la.

III.1) Méthode des caractéristiques

Supposons d'abord que V est constante, i.e.

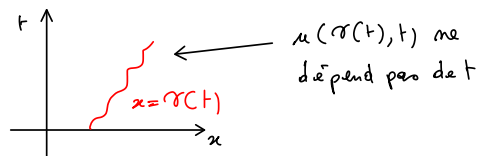
$$V(x,t) = V_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0,$$

pour un certain $V_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Puisque u est sensée être transportée, l'idée est de chercher des courbes

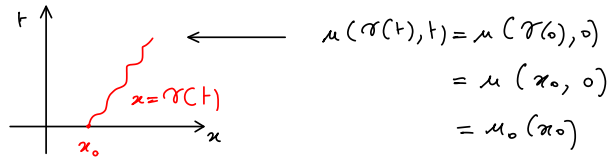
$$\gamma: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

le long desquelles u reste constante. Celle s'appelle une caractéristique:

caractéristique :



Si on note $x_0 = \gamma(t=0)$, alors le long de γ on aura :



Essayons de chercher (formellement) une telle courbe, étant donné

$x_0 \in \mathbb{R}$ arbitraire. On voudrait que pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} u(\gamma(t), t) - V_0 \frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(t), t) \\
 &= \gamma'(t) \frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(t), t) + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(\gamma(t), t)}_{\text{'' EDP}} \\
 &= (\gamma'(t) - V_0) \frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(t), t).
 \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir γ telle que

$$\gamma'(t) = V_0 \quad \forall t > 0.$$

Lorsque $V \equiv V_0$ est constante, cela nous donne une droite :

$$\gamma(t) = x_0 + V_0 t \quad \forall t \geq 0.$$

D'où $u(x_0 + V_0 t, t) = u_0(x_0)$ et en inversant cette formule, on a :

Théorème

Soient $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $V_0 \in \mathbb{R}$ (telle que $V \equiv V_0$). Alors l'unique

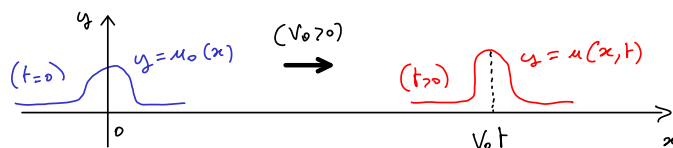
solution $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ de (St1) satisfait

⋮

$$u(x, t) = u_0(x - V_0 t) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0.$$

Remarques (ondes)

On dit qu'on a une onde qui se propage avec une vitesse V_0 . La propagation va de gauche à droite si $V_0 > 0$ et de droite à gauche sinon :



Si V n'est pas constante, on choisit γ telle que

$$(E) \quad \begin{cases} \gamma'(t) = V(\gamma(t), t) & \forall t \geq 0, \\ \gamma(0) = x_0. \end{cases}$$

On aura bien une courbe caractéristique puisque

$$\frac{d}{dt} u(\gamma(t), t) = \underbrace{\gamma'(t)}_{V(\gamma(t), t)} \frac{\partial u}{\partial x}(\gamma(t), t) + \frac{\partial u}{\partial t}(\gamma(t), t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{EDP})$$

D'où :

Théorème

Soient $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $V = V(x, t)$ suffisamment régulière. Alors

l'unique solution $\mu \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ satisfait :

$$\mu(\sigma(t), t) = \mu_0(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0,$$

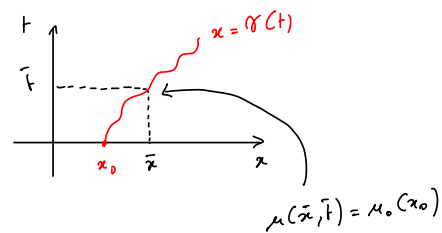
où σ est l'unique solution de l'ODE (E).

Dans la pratique, on calcule $\mu(\bar{x}, \bar{t})$ en connaissant quels $\bar{x} \in \mathbb{R}$

et $\bar{t} \geq 0$, en cherchant $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que l'unique solution de (E)

satisfait $\sigma(\bar{t}) = \bar{x}$.

Par exemple :



Exercice

En déduire la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} + x \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ \mu(x, t=0) = \sin(x) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

III.2) Vitesse de propagation

Supposons maintenant que la vitesse du fluide est bornée, ie

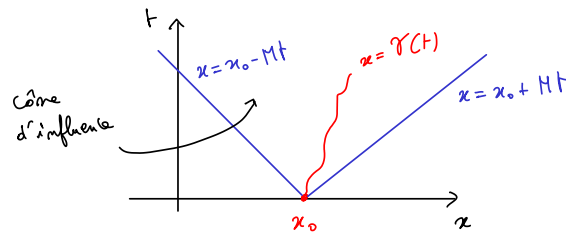
$$|V(x, t)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0,$$

pour une certaine constante M . Alors la solution de (E) satisfait :

$$|\gamma(t)| \leq x_0 + Mt \quad \forall t \geq 0.$$

Cela veut dire que si on modifie u_0 en x_0 , cela ne modifiera pas

les valeurs de u en dehors du cône d'influence suivant :

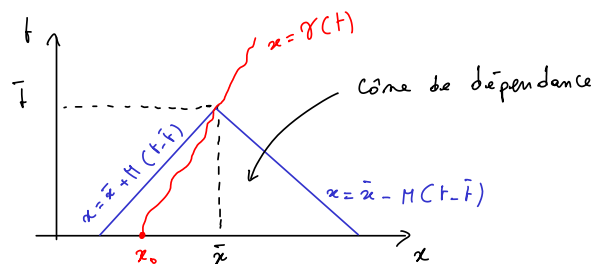


On dit que l'EDP a une vitesse de propagation finie. On dé-

finiit inversement le cône de dépendance de sommet (\bar{x}, \bar{T}) , com-

me l'ensemble des x_0 tels que la solution de (E) pourrait atteindre

\bar{x} au temps \bar{T} , i.e. :



2.4 EDP hyperboliques d'ordre 2, ondes

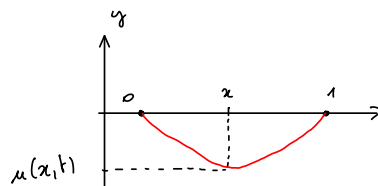
(Tournez la page.)

IV) EDP hyperboliques d'ordre 2, ondes

Dans cette section, on se concentre sur le problème

$$\begin{cases}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall x \in]0,1[, \forall t > 0, & \text{(Eq. ondes)} \\
 u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t > 0, & \text{(Dirichlet homogène)} \\
 u(x,t=0) = u_0(x) & \forall x \in [0,1], \\
 \frac{\partial u}{\partial t}(x,t=0) = u_1(x) & \forall x \in [0,1], & \left. \vphantom{\frac{\partial u}{\partial t}} \right\} \text{(Conditions initiales)}
 \end{cases}$$

où u_0 et u_1 sont données (et u est l'inconnue). Cette EDP modélise par exemple une corde vibrante (piano, etc.) La condition au bord signifie que la corde est fixée en ses extrémités.



Les choix de u_0 et u_1 dépendent de si on frappe la corde, auquel cas $u_0 \equiv 0$ mais $u_1 \neq 0$, ou si on la tire puis on la lâche, etc.

Comme pour les ODE, on a une condition initiale sur u et $\frac{\partial u}{\partial t}$, car l'EDP est d'ordre 2 en temps. Enfin $c > 0$ est une const-

ante physique qui aura une influence sur la fréquence des vibrations. Elle dépend de la tension de la corde, etc. Mentionnons aussi que cette EDP modélise des phénomènes de propagation d'ondes, car c est reliée à la vitesse de l'onde. Plus de détails sont donnés à la fin de cette section. On continue avec ce modèle non dimensionné pour mettre en évidence le rôle de c .

IV.1) Estimation d'énergie

On n'a pas de principe du max pour (S12); en effet, si on tîne puis on lâche la corde, donc avec $u_0 \neq 0$ et $u_1 \equiv 0$, on ne peut avoir $u \equiv 0$ tout le temps car la corde va vibrer. L'unicité repose alors sur :

Lemme (estimation d'énergie)

Soient $c > 0$ et $u_0, u_1 \in C^\infty([0, 1])$. Alors toute solution

$u \in C^\infty([0, 1] \times [0, +\infty[)$ de (S12) est telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\underbrace{\int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx}_{\text{énergie cinétique}} + c^2 \underbrace{\int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|^2 dx}_{\text{énergie mécanique}} = \int_0^1 |u_1(x)|^2 dx + c^2 \int_0^1 \left| \frac{\partial u_0}{\partial x}(x) \right|^2 dx.$$

Remarque

L'énergie étant constante, on dit que le système est conservatif.

Cela est dû au fait que le modèle (Hz) ne tient pas compte de l'amortissement. Dans le cas contraire, on aurait en " \leq " à la place de " $=$ ".

Preuve

En multipliant l'EDP par $\frac{\partial u}{\partial t}$, on a

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2} - c^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \forall x \in]0, 1[, t > 0,$$

En intégrant en x ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{de } \frac{\partial}{\partial t}}} dx - c^2 \int_0^1 \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{IPP en } x} dx &= 0 \quad \forall t > 0. \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx - \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial u}{\partial x} dx}_{\substack{\text{noté} \\ I}} + \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=1}}_{\substack{\text{noté} \\ J}} &= 0 \end{aligned}$$

Sur de bord, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(1, t) = 0 \quad \forall t > 0$$

(car $u(0,t) = u(1,t) \quad \forall t > 0$). D'où

$$J = \frac{\partial u}{\partial t}(1,t) \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(0,t) \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0.$$

De plus $I = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx$ et donc

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + c^2 \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx}_{\substack{\text{|| notation} \\ E(t)}} \right) = 0 \quad \forall t > 0.$$

On conclut que

$$E(t) = E(0) \quad \forall t \geq 0,$$

ce qui donne exactement le lemme en utilisant les conditions initiales. ■

Exercice (unicité)

Soient $c > 0$ et $u_0, u_1 \in C^\infty([0,1])$.

1) Montrez que si $u, v \in C^\infty([0,1] \times [0, +\infty[)$ sont solutions de (St2),

alors $w = u - v$ satisfait

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) \right|^2 dx + c^2 \int_0^1 \left| \frac{\partial w}{\partial x}(x,t) \right|^2 dx = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

2) En déduire que $u(x,t) = v(x,t)$ pour tout $x \in [0,1]$ et $t \geq 0$.

IV.2) Méthode spectrale

Exercice (existence)

Soient $c > 0$ et $u_0, u_1 \in C^\infty([0,1])$.

1) On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $-c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ avec condition de Dirichlet si il existe $0 \neq \phi \in C^\infty([0,1])$ tel que

$$(PVP_c) \quad \begin{cases} -c^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2}(x) = \lambda \phi(x) & \forall x \in]0,1[, \quad (\text{Helmholtz}) \\ \phi(0) = \phi(1) = 0. & (\text{Dirichlet}) \end{cases}$$

Montrez que l'ensemble de ces λ est donné par la suite $(c^2 \pi^2 m^2)_{m \geq 1}$.

2) Montrez que les espaces propres associés sont

$$E_{c^2 \pi^2 m^2} = \text{vect} \{ \phi_m \},$$

où $\phi_m(x) = \sin(\pi m x)$.

3) Soient $m \geq 1$ fixé, $f_m \in C^\infty([0, +\infty[)$ et $u_m(x,t) = f_m(t) \phi_m(x)$.

Montrez que u_m résout l'EDP de (H2) si et seulement si

$$f_m(t) = A_m \cos(c\pi m t) + B_m \sin(c\pi m t)$$

pour certaines constantes $A_m, B_m \in \mathbb{R}$. Vous préciserez aussi l'EDO

satisfaite par f_m .

4) Notons la série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(A_n \cos(\pi n t) + B_n \sin(\pi n t))}_{d_n(t)} \underbrace{\sin(\pi n x)}_{\phi_n(x)}.$$

choisissez les suites de réels $(A_n)_{n \geq 1}$ et $(B_n)_{n \geq 1}$ pour avoir les conditions initiales

$$u(x, t=0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = u_1(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Vous supposez avoir les conditions de compatibilité

$$u_0^{(2n)}(0) = u_0^{(2n)}(1) = 0 \quad \text{et} \quad u_1^{(2n)}(0) = u_1^{(2n)}(1) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et vous admettez que la série converge alors très bien et que $u \in C^\infty([0, 1] \times [0, +\infty[)$.

6) En déduire que (H2) admet une (unique) solution C^∞ qui

est :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(d_n \cos(c\pi n t) + \frac{e_n}{c\pi n} \sin(c\pi n t) \right)}_{n^{\text{ème}} \text{ mode propre}} \sin(\pi n x),$$

$\frac{2}{c\pi n}$ est la $n^{\text{ème}}$ fréquence propre

avec les coefficients

$$d_n = 2 \int_0^1 u_0(y) \sin(\pi n y) dy \quad \text{et} \quad e_n = 2 \int_0^1 u_1(y) \sin(\pi n y) dy.$$

Vous raisonnerez formellement en manipulant les séries comme des sommes finies.

Remarque

En intervenant sur \int et Σ , on a aussi

$$u(x, t) = \int_0^1 L_0(x, y, t) u_0(y) dy + \int_0^1 L_1(x, y, t) u_1(y) dy$$

avec les fonctions de Green (version hyperbolique)

$$L_0(x, y, t) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(c\pi n t) \sin(\pi n x) \sin(\pi n y)$$

$$\text{et } L_1(x, y, t) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(c\pi n t)}{c\pi n} \sin(\pi n x) \sin(\pi n y).$$

IV.3) Vitesse de propagation

Il y a une différence importante entre les EDP d'évolution paraboliques et hyperboliques. Pour l'expliquer, considérons les problèmes

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ u(x, t=0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$(7) \quad \text{et } \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ v(x, t=0) = v_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, t=0) = v_1(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(sans condition au bord puisque $\Omega = \mathbb{R}$ n'a pas de bord).

On admet le résultat suivant :

Théorème (chaleur)

Si u_0 est assez régulière, alors (6) admet une unique solution qui satisfait :

$$(8) \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy .$$

Remarque

Ici "assez régulière" veut par exemple dire que l'énergie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(x)|^2 dx < +\infty ,$$

ce qui est naturel d'un point de vue physique. L'intégrale généralisée de (8) est alors toujours convergente.

Remarque

Les idées pour montrer ce résultat sont les mêmes qu'avant (principe du max, méthode spectrale), la seule différence est que les séries de Fourier sont remplacées par la transformée de

⋮

Fournier. On remarque qu'on a une nouvelle fonction de Green

$$(x, y, t) \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}.$$

En ce qui concerne les ondes, on admet que :

Théorème (ondes)

Soient $c > 0$ et $r_0, r_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique sol-

ution $r \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ à (7), qui est donnée par

$$r(x, t) = \frac{1}{2} (r_0(x+ct) + r_0(x-ct))$$

$$+ \frac{1}{2c} (V_1(x+ct) - V_1(x-ct)),$$

où V_1 est une primitive de r_1 (i.e. $V_1'(x) = r_1(x) \forall x \in \mathbb{R}$).

Remarque

La solution r est donc une superposition de 4 ondes, du type de

celles obtenues avec l'équation de transport. Ces ondes sont :

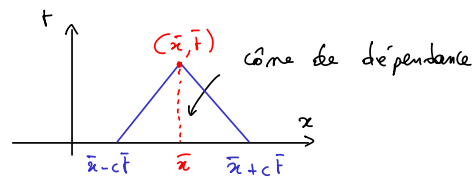
$$(x, t) \mapsto \frac{1}{2} r_0(x \pm ct) \quad \text{et} \quad (x, t) \mapsto \pm \frac{1}{2c} V_1(x \pm ct).$$

On rappelle qu'elles se propagent avec une vitesse $\pm c$.

La solution (9) peut se réécrire comme ci-dessous :

$$r(x, t) = \frac{1}{2} (r_0(x+ct) + r_0(x-ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} r_1(y) dy.$$

En fixant $\bar{x} \in \mathbb{R}$ et $\bar{t} \geq 0$, on voit que le calcul de $r(\bar{x}, \bar{t})$ ne dépend que des valeurs de r_0 et r_1 sur $[\bar{x}-c\bar{t}, \bar{x}+c\bar{t}]$:



L'équation des ondes a donc une vitesse de propagation finie

(comme celle du transport).

Au contraire, si on modifie r_0 n'importe où, cela modifie immédiatement r partout (puisque la fonction de Green $e^{-\frac{(\dots)^2}{4t}}$ de (8) est toujours > 0). L'équation de la chaleur a donc une vitesse de propagation infinie.

Exercice

Vérifiez que les fonctions définies en (8) et (9) satisfont (6) et (7).

Vous raisonnerez formellement sans justifier la convergence des

⋮

∴ intégrales. Vous admettrez aussi que ce satisfait la condition
| initiale (ce qui est difficile à démontrer).

Chapitre 3

Analyse numérique des EDP

3.1 Méthode des différences finies (MDF)

(Tournez la page.)

Partie 3: Analyse numérique des EDP

Pour les problèmes plus généraux, il est rare d'avoir une représentation explicite simple de la solution. On utilise alors des méthodes d'approximation par ordinateur. Cette partie est une introduction à ces méthodes.

I) Méthode des différences finies (MDF)

Elle consiste à approximer la solution en un nombre fini de points, en remplaçant les dérivées par des quotients différentiels.

I.1) Approximation des dérivées

Etant donnée une fonction $v = v(y)$ (y réel), comment approximer

$$v'(y_0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{v(y) - v(y_0)}{y - y_0} ?$$

L'idée est de se fixer une longueur $h > 0$ et de prendre

$$v'(y_0) \approx \frac{v(y_0 + h) - v(y_0)}{h} .$$

Cela s'appelle un schéma aux différences finies. En voici un autre :

$$v'(y_0) \approx \frac{v(y_0) - v(y_0 - h)}{h} .$$

Ils sont dits décentrés à droite et à gauche. On peut être plus précis avec un développement limité. Rappelons que :

Théorème (DL de Taylor à l'ordre m)

Soient $a < b$, $f \in C^\infty([a, b])$ et $y_0 \in [a, b]$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$,

et tout $y \in [a, b]$, il existe \bar{y} compris entre y_0 et y tel que

$$f(y) = \underbrace{\sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(y_0)}{k!} (y-y_0)^k}_{\text{polynôme en } y \text{ d'ordre } m} + \underbrace{\frac{f^{(m+1)}(\bar{y})}{(m+1)!} (y-y_0)^{m+1}}_{\text{reste}}$$

Corollaire (développement décentré à droite)

Soient $a < b$, $f \in C^\infty([a, b])$, $y_0 \in [a, b]$ et $h > 0$ tel que

$y_0 + h \in [a, b]$. Alors

$$f'(y_0) = \frac{f(y_0+h) - f(y_0)}{h} + r h$$

pour un certain réel r tel que $|r| \leq \frac{1}{2} \|f''\|_\infty$.

Corollaire (à gauche)

Sous les mêmes hypothèses avec $y_0 - h \in [a, b]$,

$$f'(y_0) = \frac{f(y_0) - f(y_0-h)}{h} + r h \quad (r \text{ comme ci-dessus}).$$

Ces corollaires s'obtiennent avec des DL d'ordre 1. Précisons que

$$\|r^{(k)}\|_{\infty} = \max_{y \in [a, b]} |r^{(k)}(y)|$$

désigne la norme infinie de $r^{(k)}$. Les erreurs sont donc linéaires

en h puisque

$$\left| r'(y_0) - \frac{r(y_0+h) - r(y_0)}{h} \right| = |r''(\xi)| h \leq \frac{\|r''\|_{\infty}}{2} h^2$$

constante indépendante
de y_0 et de h

ordre = puissance

On dit que ces schémas sont d'ordre 1.

On peut trouver des schémas plus précis en combinant différents

DL. On peut aussi approcher $r''(y_0)$, etc. Par exemple :

Lemme (schéma centré pour r'')

Sous les hypothèses précédentes avec $y_0-h, y_0+h \in [a, b]$,

$$r''(y_0) = \frac{r(y_0+h) + r(y_0-h) - 2r(y_0)}{h^2} + r'''(\xi) h^2 \quad \leftarrow \text{ordre 2}$$

pour un certain réel ξ tel que $|\xi| \leq \frac{1}{12} \|r^{(4)}\|_{\infty}$.

Preuve

Il existe $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in [a, b]$ tels que

$$r(y_0+h) = r(y_0) + r'(y_0)h + \frac{r''(y_0)}{2}h^2 + \frac{r'''(y_0)}{6}h^3 + \frac{r^{(4)}(\bar{y}_1)}{24}h^4,$$

$$\text{et } r(y_0 - h) = r(y_0) - r'(y_0)h + \frac{r''(y_0)}{2}h^2 - \frac{r'''(y_0)}{6}h^3 + \frac{r^{(4)}(\bar{y}_1)}{24}h^4,$$

En sommant ces DL, on déduit que

$$r(y_0 + h) + r(y_0 - h) = 2r(y_0) + r''(y_0)h^2 - \tau h^4,$$

$$\text{avec } \tau = -\frac{1}{24} (r^{(4)}(\bar{y}_1) + r^{(4)}(\bar{y}_2)) \text{ d'où } |\tau| \leq \frac{1}{12} \|r^{(4)}\|_{\infty}.$$

I.2) Approximation d'une EDP

Nous allons maintenant donner un exemple d'approximation d'une

EDP par DF. Prenons le problème

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \forall x \in]0,1[, \forall t \in]0,T], \text{ (chauffon)} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t \in]0,T], \text{ (Dirichlet aux bords)} \\ u(x,t=0) = u_0(x) & \forall x \in]0,1[, \text{ (condition initiale)} \end{cases}$$

où u_0 est donnée et $T > 0$ est un temps fixé (jusqu'au quel on désire faire les calculs par ordinateur).

I.2.a) Un exemple de maillage

Pour discrétiser le domaine $]0,1[\times]0,T]$, on se donne

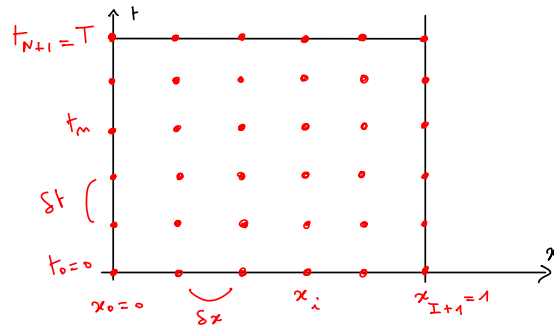
des pas en espace et en temps

$$\delta x = 1/(I+1) \quad \text{et} \quad \delta t = T/(N+1),$$

où I et N sont des entiers fixes, puis on définit les nœuds

$$(x_i, t_m) = (i \delta x, m \delta t) \quad \forall i = 0, \dots, I+1, \quad \forall m = 0, \dots, N+1.$$

On obtient le maillage "régulier" suivant :



On va approximer les valeurs $u(x_i, t_m)$ par des réels u_i^m qui devront satisfaire une version discrète de (\tilde{P}) .

I.2. b) Un exemple de schéma

Pour discrétiser l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, on choisit des schémas

aux DF pour chaque dérivée. Prenons par exemple

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_m) \simeq \frac{u(x_i, t_{m+1}) - u(x_i, t_m)}{\delta t}, \quad (\text{décentré à droite})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_m) \simeq \frac{u(x_{i+1}, t_m) + u(x_{i-1}, t_m) - 2u(x_i, t_m)}{(\delta x)^2}. \quad (\text{centré})$$

Etant donné qu'on désire avoir $u_i^m \simeq u(x_i, t_m)$, cela conduit à

chercher un vecteur $(\tilde{u}_i^m) \in \mathbb{R}^{(I+2)(N+2)}$ tel que

$$\left(\tilde{\mathcal{P}}_{\delta x, \delta t} \right) \begin{cases} \frac{\mu_i^{m+1} - \mu_i^m}{\delta t} - \frac{\mu_{i+1}^m + \mu_{i-1}^m - 2\mu_i^m}{(\delta x)^2} = 0 & \forall i = 1, \dots, I, \forall m = 0, \dots, N, \quad \text{(Schéma aux DF)} \\ \mu_0^m = \mu_{i+1}^m = 0 & \forall m = 1, \dots, N+1, \quad \text{(Dirichlet au bord)} \\ \mu_i^0 = u_0(x_i) & \forall i = 0, \dots, I+1. \quad \text{(Condition initiale)} \end{cases}$$

Remarque

Par récurrence sur m , $(\tilde{\mathcal{P}}_{\delta x, \delta t})$ admet une unique solution.

Remarque

Si la condition au bord fait intervenir des dérivées, comme Neuman, on doit les remplacer par des formules aux DF.

I.3) Analyse de la convergence

On espère que la solution de $(\tilde{\mathcal{P}}_{\delta x, \delta t})$ converge vers celle de $(\tilde{\mathcal{P}})$

lorsque $\delta x, \delta t \rightarrow 0$. Vérifions le. Dans la suite, on suppose que

$$(H) \begin{cases} (1) \mu_0, T, \delta x \text{ et } \delta t \text{ sont donnés comme précédemment,} \\ (2) \text{ avec } \mu_0 \text{ suffisamment régulière pour que } (\tilde{\mathcal{P}}) \text{ admette} \\ \vdots \end{cases}$$

(H) \vdots
 [une unique solution $u \in C^{\infty}([0, T] \times [0, T])$].

Nous allons utiliser un théorème général, qui permet de ramener l'étude de la convergence à celle de la consistance et de la stabilité du schéma. Intéressons nous d'abord à ces deux dernières notions.

I.3. a) Consistance

En discrétisant l'EDP, on a commis des erreurs

$$\varepsilon_i^m = \left[\frac{u(x_i, t_{m+1}) - u(x_i, t_m)}{\delta t} - \frac{u(x_{i+1}, t_m) + u(x_{i-1}, t_m) - 2u(x_i, t_m)}{(\delta x)^2} \right] - \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_m) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_m) \right],$$

appelées erreurs de troncature aux maillages (x_i, t_m) . Notons

$$E(u) = \max_{\substack{i=1, \dots, I \\ m=0, \dots, N}} |\varepsilon_i^m|$$

l'erreur globale. Alors:

Définition (consistance et précision)

On dit que le schéma est consistant si

$$\lim_{\delta x, \delta t \rightarrow 0} E(u) = 0.$$

Si on a de plus

$$\varepsilon(u) \leq C((\delta t)^p + (\delta x)^q),$$

pour certains entiers p, q , et une certaine constante C , tous indépendants de δx et δt , alors on dit que le schéma est précis à l'ordre p en temps et q en espace.

Pour obtenir de telles propriétés, on utilise généralement les DL de la section I.1. Laissons les détails sous la forme de l'exercice suivant :

Exercice (consistance et précision)

1) Montrez que

$$\varepsilon(u) \leq \max \left\{ \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial_m^2}{\partial t^2} \right\|_\infty, \frac{1}{12} \left\| \frac{\partial_m^4}{\partial x^4} \right\|_\infty \right\} (\delta t + (\delta x)^2)$$

où

$$\left\| \frac{\partial_m^2}{\partial t^2} \right\|_\infty = \max_{\substack{x \in [0,1] \\ t \in [0,T]}} \left| \frac{\partial_m^2}{\partial t^2}(x,t) \right| \quad (\text{idem pour } \frac{\partial_m^4}{\partial x^4}).$$

2) En déduire que le schéma est consistant et précis à l'ordre 1 en temps et 2 en espace.

Remarque

L'erreur globale satisfait

$$\varepsilon(x) = \max_{m=0, \dots, N} \underbrace{\max_{i=1, \dots, I} |\varepsilon_i^m|}_{\|(\varepsilon_i^m)_i\|_\infty}$$

avec la norme infinie du vecteur $(\varepsilon_i^m)_{i=1, \dots, I} \in \mathbb{R}^I$, définie

comme ci-dessus. On peut définir d'autres notions de consistance, généralement plus faibles, en changeant de norme (L^2 , etc.)

I.3.2) Stabilité L^∞

La consistance d'un schéma n'est pas suffisante pour assurer que la solution approchée est proche de la solution exacte, du moment que Δx et Δt sont petits. Pour cela, on doit de plus contrôler les erreurs numériques, qui s'accumulent au cours des différentes étapes de l'algorithme. Le problème est lié à la notion de stabilité. Dans le cas de schémas linéaires, elle s'énonce sous une forme simplifiée. Expliquons d'abord pourquoi notre schéma est linéaire, avec un exercice.

Dans la suite, on note

$$U^m = (u_i^m)_{i=0, \dots, I+1} \in \mathbb{R}^{I+2}$$

l'état de la température approché au temps t_m . Notons aussi

$$U_0 = (u_0(x_i))_{i=0, \dots, I+1} \in \mathbb{R}^{I+2},$$

l'état initial donné. Alors :

Exercice

Montrez que $(\tilde{P}_{Sx, St})$ est équivalent à

$$\begin{cases} U^{m+1} = M U^m & \forall m = 0, \dots, N, & \text{(schéma)} \\ U^0 = U_0, & & \text{(donnée initiale)} \end{cases}$$

pour une certaine matrice M dépendant seulement de Sx et St .

Par suite,

$$U^m = \overbrace{M \times \dots \times M}^{m \text{ fois}} U_0 = M^m U_0 \quad \forall m,$$

et chaque U^m dépend linéairement de l'état initial U_0 . D'ici,

pour contrôler l'accumulation des erreurs numériques indépendam-

ment de la finesse du maillage choisi, on doit contrôler

uniformément toutes les matrices M^n , pour une norme bien choisie. C'est-à-dire :

Définition (stabilité)

Le schéma est dit stable pour une norme $\|\cdot\|$ si

$$\|U^n\| \leq C \|U_0\| \quad \forall n,$$

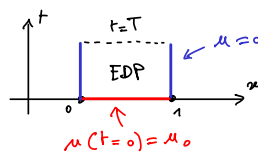
avec une certaine constante C indépendante de δx , δt et U_0 .

La stabilité L^∞ correspond au choix de la norme

$$\|U^n\|_\infty = \max_{i=0, \dots, I+1} |u_i^n|.$$

Elle est liée au principe du max. Rappelons que u atteint son

max et son min sur la frontière parabolique, avec :



D'où $\max_{x \in [0,1]} |u(x,t)| \leq \max_{x \in [0,1]} |u_0(x)| \quad \forall T \geq t \geq 0$. En prenant n' imp-

ote quel temps $s \geq 0$ comme temps initial, le même raisonnement

montre que

$$\max_{x \in [0,1]} |u(x,t)| \leq \max_{x \in [0,1]} |u(x,0)| \quad \forall T \geq t \geq 0.$$

L'idée pour avoir un schéma L^∞ -stable est de demander à avoir

cette propriété pour la solution approchée, i.e

$$\|U^{m+1}\|_\infty \leq \|U^m\|_\infty \quad \forall m = 0, \dots, N.$$

Pour cela, on réécrit le schéma

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\delta t} - \frac{u_{i+1}^m + u_{i-1}^m - 2u_i^m}{(\delta x)^2} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, I, \quad \forall m = 0, \dots, N,$$

sous la forme

$$(10) \quad u_i^{m+1} = a u_{i-1}^m + b u_i^m + c u_{i+1}^m \quad \forall i = 1, \dots, I, \quad \forall m = 0, \dots, N,$$

$$\text{à } a = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}, \quad b = 1 - 2a \text{ et } c = a. \text{ D'où,}$$

$$|u_i^{m+1}| \leq (|a| + |b| + |c|) \|U^m\|_\infty \quad \forall i = 1, \dots, I, \quad \forall m = 0, \dots, N,$$

et par suite

$$\max_{i=1, \dots, I} |u_i^{m+1}| \leq (|a| + |b| + |c|) \|U^m\|_\infty \quad \forall m = 0, \dots, N.$$

Puisque $u_0^{m+1} = u_{I+1}^{m+1} = 0$ d'après Dirichlet, on en déduit que

$$\begin{aligned} \|U^{m+1}\|_\infty &= \max_{i=0, \dots, I+1} |u_i^{m+1}| \\ &= \max_{i=1, \dots, I} |u_i^{m+1}| \leq (|a| + |b| + |c|) \|U^m\|_\infty \quad \forall m = 0, \dots, N, \end{aligned}$$

Pour avoir $\|U^{m+1}\|_\infty \leq \|U^m\|_\infty$, il suffit donc que

$$(11) \quad |a| + |b| + |c| \leq 1.$$

Rappelons maintenant que $a = c = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}$ et $b = 1 - 2a$. D'où

$$a + b + c = 1$$

et la seule façon d'avoir (11) est de demander que

$$a, b \text{ et } c \text{ soient } \geq 0.$$

On dit dans ce cas que (10) est une combinaison convexe. Puisque

$a = c$ sont déjà > 0 , il suffit d'avoir $b \geq 0$, i.e

$$(CFL) \quad \frac{2\delta t}{(\delta x)^2} \leq 1.$$

↑
Gerant
Friedrichs
Lévy

D'où :

Lemme (principe du max discret)

Sous la condition (CFL),

$$\|U^m\|_{\infty} \leq \|U_0\|_{\infty}$$

" le max de $|u_n^m|$ est
atteint au temps initial "

$$\forall n = 0, \dots, N.$$

Corollaire (stabilité conditionnelle)

Sous la condition (CFL), le schéma est L^{∞} -stable.

I.3. c) Convergence

En général, la convergence d'un schéma se montre à l'aide du résultat fondamental ci-dessous.

Théorème de Lax (version formelle)

Si un schéma est consistant et stable, pour une certaine norme $\|\cdot\|$, alors la solution approchée converge vers la solution exacte, au sens de $\|\cdot\|$, lorsque les pas du maillage tendent vers 0.

De plus, l'erreur est du même ordre que l'erreur de troncature.

Pour être plus rigoureux, nous devrions définir le sens de la convergence, etc. Pour simplifier, précisons simplement les résultats que l'on obtient dans notre cas.

Théorème (Convergence)

Sous (H),

erreur entre u et (u_i^m) pour la norme $\|\cdot\|_\infty$

$$\lim_{\substack{\delta x, \delta t \rightarrow 0 \\ (CFL)}} \max_{m=0, \dots, N+1} \max_{i=0, \dots, I+1} |u_i^m - u(x_i, t_m)| = 0.$$

Théorème (estimation d'erreur)

Sous (H) et la condition (CFL),

$$\max_{m=0, \dots, N+1} \max_{i=0, \dots, I+1} |u_i^m - u(x_i, t_m)| \leq C_T (\delta t + (\delta x)^2)$$

ordre 1 en temps et 2 en espace

avec la constante

$$C_T = T \max \left\{ \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{\infty}, \frac{1}{12} \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{\infty} \right\}.$$

Donnons maintenant une preuve directe de l'estimation d'erreur, qui impliquera automatiquement la convergence. On va utiliser des idées similaires à celles du théorème de Lax.

Preuve (de l'estimation d'erreur)

Pour tout $m = 0, \dots, N+1$, posons

$$E_m = \max_{i=0, \dots, I+1} |u_i^m - u(x_i, t_m)|$$

et estimons E_{m+1} par rapport à E_m (avec m fixe).

Le schéma dit que

$$(12) \quad \frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\delta t} - \frac{u_{i+1}^m + u_{i-1}^m - 2u_i^m}{(\delta x)^2} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, I.$$

Rappelons que l'erreur de troncature au maillage (x_i, t_m) est

$$(13) \quad \epsilon_i^m = \frac{u(x_i, t_{m+1}) - u(x_i, t_m)}{\delta t} - \frac{u(x_{i+1}, t_m) + u(x_{i-1}, t_m) - 2u(x_i, t_m)}{(\delta x)^2}.$$

Posons finalement

$$r_i^m = u_i^m - u(x_i, t_m).$$

Alors "(12) - (13)" dit que :

$$\frac{r_i^{m+1} - r_i^m}{\delta t} - \frac{r_{i+1}^m + r_{i-1}^m - 2r_i^m}{(\delta x)^2} = -\epsilon_i^m \quad \forall i=1, \dots, I.$$

Réécrivons encore ceci sous la forme

$$r_i^{m+1} = a r_{i-1}^m + b r_i^m + c r_{i+1}^m - \delta t \epsilon_i^m \quad \forall i=1, \dots, I.$$

où $a = \frac{\delta t}{(\delta x)^2}$, $b = 1 - 2a$ et $c = a$. Rappelons que

$$(CFL) \Leftrightarrow |a| + |b| + |c| \leq 1.$$

Puisque $|r_{i-1}^m|$, $|r_i^m|$ et $|r_{i+1}^m|$ sont $\leq E_m$, on déduit que

$$|r_i^{m+1}| \leq (|a| + |b| + |c|) E_m + \delta t |\epsilon_i^m|.$$

$$\leq E_m + \delta t |\epsilon_i^m| \quad \forall i=1, \dots, I.$$

Par suite, $\max_{i=1, \dots, I} |r_i^{m+1}| \leq E_m + \delta t \max_{i=1, \dots, I} |\epsilon_i^m|$.

Mais par Dirichlet $r_0^{m+1} = u_0^{m+1} - u(0, t_{m+1}) = 0$ (idem pour r_{I+1}^{m+1}).

D'où

$$E_{m+1} = \max_{i=0, \dots, I+1} |r_i^{m+1}| = \max_{i=1, \dots, I} |r_i^{m+1}| \leq E_m + \delta t \max_{i=1, \dots, I} |\epsilon_i^m|.$$

Puisque m était fixé arbitrairement depuis le début, on vient de montrer que

$$E_{m+1} \leq E_m + \delta t \max_{i=1, \dots, I} |\varepsilon_i^m| \quad \forall m = 0, \dots, N+1.$$

Maintenant, on se rappelle que l'erreur de troncature globale est d'ordre 1 en temps et 2 en espace, avec

$$\varepsilon(u) = \max_{\substack{i=1, \dots, I \\ m=0, \dots, N}} |\varepsilon_i^m| \leq C (\delta t + (\delta x)^2)$$

où la constante

$$C = \max \left\{ \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{\infty}, \frac{1}{12} \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\|_{\infty} \right\}$$

(voir la section I.3.a). D'où

$$E_{m+1} \leq E_m + \delta t C (\delta t + (\delta x)^2) \quad \forall m = 0, \dots, N+1.$$

Par récurrence sur m , on déduit que

$$E_m \leq E_0 + (m \delta t) C (\delta t + (\delta x)^2) \quad \forall m = 0, \dots, N+1.$$

On a $m \delta t = t_n$ et d'après la condition initiale,

$$E_0 = \max_{i=0, \dots, I+1} \underbrace{|u_i^0 - u(x_i, t_0)|}_{\substack{= \\ |u_0(x_i) - u_0(x_i)|}} = 0.$$

D'où

$$E_m = \max_{i=0, \dots, I+1} |u_i^m - u(x_i, t_n)| \leq C t_n (\delta t + (\delta x)^2)$$

pour tout $m = 0, \dots, N+1$. Rappelons fermement que pour tout ces m ,

$$0 \leq t_m \leq T.$$

et donc

$$\max_{m=0, \dots, N+1} \max_{i=0, \dots, I+1} |u_i^m - u(x_i, t_m)| \leq CT(\delta t + (\delta x)^2). \quad \blacksquare$$

I.4) Schémas explicite et implicite

Donnons maintenant un autre exemple de schéma, que l'on va

comparer avec le précédent. Rappelons que l'EDP discrète de

$(\mathcal{D}_{\delta x, \delta t})$ peut se réécrire sous la forme

$$(SE) \quad u_i^{m+1} = \frac{\delta t}{(\delta x)^2} u_{i-1}^m + \left(1 - \frac{2\delta t}{(\delta x)^2}\right) u_i^m + \frac{\delta t}{(\delta x)^2} u_{i+1}^m.$$

Ce schéma a été obtenu avec les formules centrées pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et

décentrée à droite pour $\frac{\partial u}{\partial t}$. En prenant celle à gauche, on

obtient la nouvelle EDP discrète

$$\frac{u_i^{m+1} - u_i^m}{\delta t} - \frac{u_{i+1}^{m+1} + u_{i-1}^{m+1} - 2u_i^{m+1}}{(\delta x)^2} = 0,$$

qui peut se réécrire sous la forme

$$(SI) \quad -\frac{\delta t}{(\delta x)^2} u_{i-1}^{m+1} + \left(1 + \frac{2\delta t}{(\delta x)^2}\right) u_i^{m+1} - \frac{\delta t}{(\delta x)^2} u_{i+1}^{m+1} = u_i^m.$$

Le calcul de la solution approchée par ordinateur consiste à d'abord prendre en compte la condition initiale, en implémentant l'état de la température U^0 au temps $t_0=0$, puis à calculer chaque U^{m+1} en fonction de U^m . Rappelons que

$$U^m = (u_i^m)_i,$$

d'où le schéma (SI) nécessite l'inversion d'un système linéaire pour calculer U^{m+1} . Il est dit implicite en temps, au contraire de (SE) qui est explicite. Ce dernier a l'avantage d'être peu coûteux en temps de calcul. Par contre, on peut voir que (SI) a l'avantage d'être inconditionnellement stable, cf. les TD.

D'une manière générale, le choix du schéma dépend de plusieurs facteurs, tels que la précision, la stabilité, le temps de calcul, etc. Il est généralement impossible d'avoir tout et on doit faire des compromis.

3.2 Méthode des éléments finis (MEF)

(Tournez la page.)

II) Méthode des éléments finis (MEF)

Donnons maintenant une très brève introduction à la MEF. Pour une présentation détaillée, voir les polycopiés du service de mathématiques disponibles sur moodle.

La MEF consiste à approcher une reformulation du problème, dite variationnelle. Cette fois-ci, on approchera l'espace de fonctions dans lequel vit la solution.

Expliquons cela sur un problème modèle, par exemple

$$(\tilde{\mathcal{E}}) \quad \begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2}(x) = f(x) & \forall x \in]0, 1[, & \text{(Poisson)} \\ -\frac{du}{dx}(0) = \beta, & \text{(Neuman)} \\ u(1) = \alpha, & \text{(Dirichlet)} \end{cases}$$

où $f = f(x)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont donnés. C'est un problème elliptique du type de (\mathcal{E}) , mais avec d'autres conditions au bord.

On note Γ_D la partie du bord où on a Dirichlet:



$\begin{aligned} \text{domaine} &=]0, 1[\\ \text{bord} &= \{0, 1\} \\ \Gamma_D &= \{1\} \end{aligned}$
--

II.1) Formulation variationnelle

II.1.a) Motivation

Soyons plus précis sur la régularité de f et u . Pour donner un sens à $\frac{d^2 u}{dx^2}$, le plus naturel est d'espérer que u soit de classe C^2 (2 fois continûment dérivable). Pour cela, il est nécessaire que f soit de classe C^0 (continue). On admet que :

Théorème (solution classique)

Si $f \in C^0([0,1])$, il existe une unique solution $u \in C^2([0,1])$ à $(\tilde{\mathcal{E}})$.

Mais dans certains modèles, les sources peuvent être discontinues ou ne plus être des fonctions (comme des puits de Dirac en ingénierie pétrolière, etc.) On utilise alors la théorie des distributions (travaux virtuels).

On se restreindra au cas où f est une fonction, pour simplifier.

II.1.b) Reformulation du problème

L'idée est de reformuler $(\tilde{\mathcal{E}})$ en faisant porter des dérivées sur

des fonctions test ϕ , à l'aide d'intégration par partie (IPP).

Il existe plusieurs théorèmes selon le nombre d'IPP. Dans la théorie variationnelle, on cherche à avoir le même nombre de dérivées sur u et ϕ . On se restreint aussi aux fonctions test nulles sur \mathbb{D} (car la condition de Dirichlet ne fait pas intervenir de dérivées).

Soit donc $\phi :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ arbitraire telle que $\phi(1) = 0$. Formellement, si u résout $(\tilde{\xi})$, alors

$$-\phi(x) \frac{d^2 u}{dx^2}(x) = f(x) \phi(x) \quad \forall x \in]0, 1[$$

et en intégrant

$$\underbrace{- \int_0^1 \phi(x) \frac{d^2 u}{dx^2}(x) dx}_{\text{|| IPP}} = \int_0^1 f(x) \phi(x) dx.$$

$$\int_0^1 \frac{du}{dx}(x) \frac{d\phi}{dx}(x) dx + \underbrace{\phi(0) \frac{du}{dx}(0)}_{\substack{\text{|| Neuman} \\ -f}} - \underbrace{\phi(1) \frac{du}{dx}(1)}_{\substack{\text{|| car } \phi=0 \text{ sur } \mathbb{D}_D}}$$

D'où

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx}_{\substack{\text{|| moté} \\ a(u, \phi)}} = \underbrace{\int_0^1 f \phi dx + p \phi(0)}_{\substack{\text{|| moté} \\ d(\phi)}} \quad \forall \phi \text{ nulle sur } \mathbb{D}_D.$$

Cela conduit à la définition suivante :

Définition (solution variationnelle)

On dit que u est une solution variationnelle de (\tilde{E}) si

$$\begin{cases} u \in V, \\ a(u, \phi) = \ell(\phi) \quad \forall \phi \in V \text{ nulle sur } P_D, & \text{(EDP + Neumann)} \\ u = \alpha \text{ sur } P_D, & \text{(Dirichlet)} \end{cases}$$

où $V = \left\{ \begin{array}{l} \text{fonctions de }]0,1[\text{ dans } \mathbb{R} \\ \text{def} \end{array} \right\}$.

Cette définition est en fait "incomplète", car on devrait imposer plus de régularité sur f , u , ϕ , pour donner un sens aux intégrales.

Néanmoins, la définition (formelle) ci-dessus nous suffira.

Théorème (formel et admis)

Il existe "toujours" une unique solution variationnelle, qui correspond à la solution classique si f est continue.

II.2) Méthode de Galerkin

L'espace V est un espace vectoriel (sur \mathbb{R}) de dimension infinie

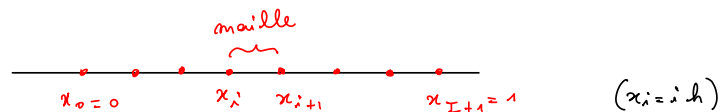
(avec la somme de fonctions $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$, etc.)

L'idée de Galerkin pour approcher (\tilde{u}) est de remplacer V par un sous-espace vectoriel $V_h \subset V$ de dimension finie. Cela conduit à chercher une fonction u_h telle que

$$\left(\begin{array}{l} u_h \in V_h, \\ a(u_h, \phi_h) = \ell(\phi_h) \quad \forall \phi_h \in V_h \text{ nulle sur } P_D, \\ u_h = \alpha \quad \text{sur } P_D. \end{array} \right)$$

II.3) MEF de Lagrange

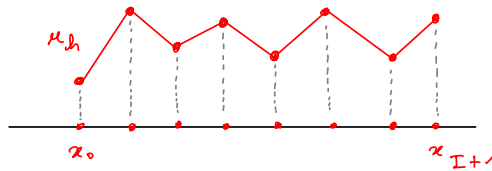
Notons $h = 1/(I+1)$, pour $I \in \mathbb{N}$ fixe, et découpons le domaine en intervalles de longueur h , appelés mailles :



La MEF de Lagrange de degré 1 consiste à choisir :

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0([0, 1]) \text{ telle que } v_h \text{ est} \right. \\
 \left. \text{polynômiale de degré } \leq 1 \text{ sur chaque maille} \right\}.$$

On aura une solution approchée continue et affine par morceaux :

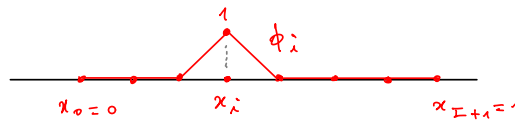


| Exercice : montrez que V_h est un espace vectoriel.

II.3. a) Base de Lagrange

Pour tout nœud x_i , notons ϕ_i l'unique fonction de V_h telle que

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } i=j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\forall j=0, \dots, I+1)$$



Lemme

La famille $\{\phi_0, \dots, \phi_{I+1}\}$ est une base de V_h . De plus,

$$(14) \quad u_h = \sum_{i=0}^{I+1} \underbrace{r_h(x_i)}_{\text{Coordonn\u00e9es}} \phi_i \quad \forall r_h \in V_h.$$

Preuve

Soit $r_h \in V_h$ arbitraire et posons $w_h = \sum_{i=0}^{I+1} r_h(x_i) \phi_i$, ie w_h est

la fonction

$$x \in [0, 1] \mapsto \sum_{i=0}^{I+1} r_{\mathcal{A}}(x_i) \phi_i(x) \in \mathbb{R}.$$

Elle est continue et affine par morceaux, puisque chacun des ϕ_i l'est.

De plus, pour tout $j = 0, \dots, I+1$

$$\omega_{\mathcal{A}}(x_j) = \sum_{i=0}^{I+1} r_{\mathcal{A}}(x_i) \underbrace{\phi_i(x_j)}_{\delta_{ij}} = r_{\mathcal{A}}(x_j).$$

Ces deux fonctions $r_{\mathcal{A}}$ et $\omega_{\mathcal{A}}$ prennent donc les mêmes valeurs aux nœuds.

On en déduit qu'elles sont égales, i.e. que

$$\omega_{\mathcal{A}}(x) = r_{\mathcal{A}}(x) \quad \forall x \in [0, 1],$$

car elles sont chacune continues et affines par morceaux. Ceci montre

(14) et aussi que la famille $\{\phi_0, \dots, \phi_{I+1}\}$ est génératrice de

$V_{\mathcal{A}}$ (car $r_{\mathcal{A}} \in V_{\mathcal{A}}$ était arbitraire).

Il reste à montrer que la famille est libre. Supposons donc que

$\lambda_0, \dots, \lambda_{I+1} \in \mathbb{R}$ sont tels que la fonction $\sum_{i=0}^{I+1} \lambda_i \phi_i$ est nulle, i.e.

$$\sum_{i=0}^{I+1} \lambda_i \phi_i(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Pour chaque $j = 0, \dots, I+1$, on peut choisir $x = x_j$, ce qui donne

$$0 = \sum_{i=0}^{I+1} \lambda_i \underbrace{\phi_i(x_j)}_{\delta_{ij}} = \lambda_j. \quad \blacksquare$$

II.3. b) Ecriture matricielle

Pour tout $u_h \in V_h$, notons

$$U_h = \begin{pmatrix} u_h(x_0) \\ \vdots \\ u_h(x_{I+1}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{I+2}$$

ses coordonnées sur la base $\{\phi_0, \dots, \phi_{I+1}\}$. Alors :

Théorème

La fonction u_h est solution de (\tilde{E}_h) si et seulement si le vec-

teur U_h est solution du système

$$AU_h = F,$$

où $A = (A_{ij})_{0 \leq i, j \leq I+1}$ et $F = (F_i)_{0 \leq i \leq I+1}$ satisfont

$$A_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } i \in \mathcal{I}_D, \\ \alpha(\phi_j, \phi_i) & \text{si } i \notin \mathcal{I}_D, \end{cases}$$

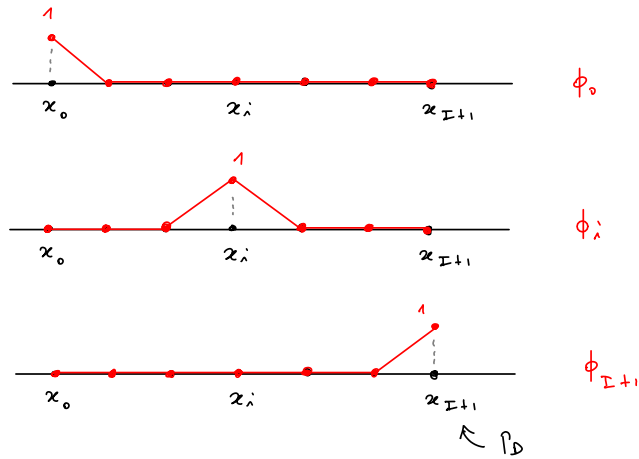
$$\text{et } F_i = \begin{cases} \alpha & \text{si } i \in \mathcal{I}_D, \\ \alpha(\phi_i) & \text{si } i \notin \mathcal{I}_D, \end{cases}$$

avec $\mathcal{I}_D = \{i = 0, \dots, I+1 \text{ tels que } \phi_i \neq 0 \text{ sur } P_D\}$.
(α est pas identiquement nulle)

L'ensemble \mathcal{I}_D correspond aux lignes qui servent à écrire la condition de Dirichlet. Puisque $\Gamma_D = \{1\}$ et $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$,

$$\mathcal{I}_D = \{i \mid \underbrace{\phi_i(1) \neq 0}_{\phi_i''(x_{I+1})}\} = \{I+1\}.$$

On a aussi le dessin :



On voit bien que ϕ_{I+1} est la seule fonction de base qui n'est pas nulle sur Γ_D . D'où A et F sont de la forme générale :

$$A = \begin{pmatrix} * & \dots & \dots & * \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Dirichlet}$$

$$* = \int_0^1 \underbrace{\frac{d\phi_i}{dx}(x) \frac{d\phi_i}{dx}(x)}_{\text{EDP}} dx,$$

$$F = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ d \end{pmatrix} \leftarrow \text{Dirichlet}$$

$$* = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx + \underbrace{\beta \phi_i(0)}_{\text{Neumann}}$$

Le calcul des coefficients κ consiste ensuite à découper les intégrales selon les mailles, ce qui conduit à des calculs de coefficients élémentaires, sur chaque maille. Ceci se fait par ordinateur, à l'aide de l'algorithme d'assemblage que nous verrons en TD.

Terminons par la preuve du résultat précédent. On a besoin de quelques propriétés, que l'on laisse sous la forme d'un exercice.

Exercice

1) Montrez que

$$V_h^0 = \left\{ v_h \in V_h \mid v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de V_h tel que

$$V_h^0 = \text{vect} \{ \phi_i \mid i \notin \mathcal{I}_D \}.$$

2) Montrez que $a: V_h^0 \times V_h^0 \rightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire et que

$l: V_h^0 \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.

(Rappel: $a(u, \phi) = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx$ et $l(\phi) = \int_0^1 f \phi dx + \beta \phi(0)$.)

Preuve (du théorème)

On a

$$(\tilde{\xi}_a) \Leftrightarrow \begin{cases} a(\mu_a, \phi_a) = \ell(\phi_a) \quad \forall \phi_a \in V_a^\circ, & (*) \\ \mu_a = \alpha \text{ sur } \Gamma_D, & (**) \end{cases}$$

où $(*) \Leftrightarrow [a(\mu_a, \phi_i) = \ell(\phi_i) \quad \forall i \notin \mathcal{I}_D],$

car $\{\phi_i \mid i \notin \mathcal{I}_D\}$ est une base de V_a° et les applications

$$a(\mu_a, \cdot) \text{ et } \ell(\cdot)$$

sont toutes les deux linéaires (avec μ_a fixe). D'où

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \left[a\left(\sum_{j=0}^{I+1} \mu_a(x_j) \phi_j, \phi_i\right) = \ell(\phi_i) \quad \forall i \notin \mathcal{I}_D \right], \\ &\Leftrightarrow \left[\sum_{j=0}^{I+1} \mu_a(x_j) a(\phi_j, \phi_i) = \ell(\phi_i) \quad \forall i \notin \mathcal{I}_D \right]. \end{aligned}$$

De plus,

$$(**) \Leftrightarrow \mu_a(1) = \alpha \Leftrightarrow \mu_a(x_{I+1}) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow [\mu_a(x_i) = \alpha \quad \forall i \in \mathcal{I}_D].$$

On déduit facilement le résultat de ces deux équivalences. ■

Bibliographie

- [1] ALIBAUD N., *Approximation des EDPs*. Polycopié du cours sur la **méthode des éléments finis** – semestre vert de **printemps** de l'ens2m – donné jusqu'en 2016-2017. Version de juin 2017.
https://lmb.univ-fcomte.fr/IMG/pdf/approx_edp_printemps_2017.pdf.
- [2] ALLAIRE G., *Analyse numérique et optimisation*. Editions de l'Ecole Polytechnique 2005, 2ème édition de 2012.
- [3] LAYDI M. R., *Introduction à la méthode des éléments finis*. Polycopié du cours du semestre vert d'**automne** de l'ens2m. Version de 2004.
<https://maths.ens2m.fr/Laydi/Enseignement/EF2004.pdf>.
- [4] LE DRET H. ET LUCQUIN B., *Partial Differential Equations : Modeling, Analysis and Numerical Approximation*. Birkhäuser, 2016.