Université de Franche-Comté
Licence de Mathématiques, Semestre 3, 2018-19

Polynômes et Algèbre Linéaire
Correction de l'examen de première session 2018-19

Exercice 1.

1. On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, et on peut en déduire que la A est inversible.

2. On a $F = \dfrac{X^2}{X^3+1} = \dfrac{X^2}{(X-1)(X^2+X+1)}$ et on en déduit que dans $\mathbb{Q}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$,
$$F = \frac{X^2}{(X-1)(X^2+X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1} \text{ avec } a,b,c \in \mathbb{Q}$$
On trouve $a = \frac{1}{3}$ en multipliant cette égalité par $(X-1)$, en simplifiant puis en évaluant en $X = 1$.
On trouve alors $b = 1 - a = \frac{2}{3}$ en multipliant cette égalité par X, et en faisant tendre X vers $+\infty$.
On trouve enfin $c = -a = -\frac{1}{3}$ en évaluant l'égalité en $X = 0$.
Ainsi, la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{Q}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$ est
$$F = \frac{1}{3(X-1)} + \frac{2X-1}{3(X^2+X+1)} \tag{1}$$
Puisque $X^2+X+1 = (X-j)(X-\overline{j})$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ dans $\mathbb{C}[X]$, on en déduit que dans $\mathbb{C}(X)$,
$$F_1 = \frac{2X-1}{3(X-j)(X-\overline{j})} = \frac{a}{X-j} + \frac{b}{X-\overline{j}} \text{ avec } a,b \in \mathbb{C}$$
On trouve $a = \frac{1}{3} + i\frac{2}{3\sqrt{3}}$ en multipliant l'égalité par $(X-j)$, en simplifiant puis en évaluant en $X = j$.
Enfin pour trouver b, on peut remarquer que $\overline{F_1(X)} = F_1(\overline{X})$ et donc que $b = \overline{a}$.
Ainsi,
$$F_1 = \frac{\frac{1}{3} + i\frac{2}{3\sqrt{3}}}{X-j} + \frac{\frac{1}{3} - i\frac{2}{3\sqrt{3}}}{X-\overline{j}}$$
et on déduit alors de (1) la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 2.

1. Puisque $X^2 - 1 = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$, les seuls diviseurs unitaires de X^2-1 sont 1, $(X-\sqrt{2})$, $(X+\sqrt{2})$ et (X^2-1). Or, $P(\pm\sqrt{2}) = 3 \neq 0$ et donc parmi ces diviseurs, seul 1 divise P. On obtient donc $\mathsf{pgcd}(X^2-1, X^4-1) = 1$.

2. *Rappelons que par le cours, la division euclidienne d'un polynôme P_1 par un polynôme P_2 donne l'existence d'une unique paire de polynômes (Q,R) telle que $P_1 = QP_2 + R$ avec $\deg(R) < \deg(P_2)$.*

   (a) f est bien définie par le rappel ci-dessus : pour chaque A il existera bien un unique $f(A)$.
   Montrons que f est linéaire.
   Soit $A_1, A_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Il existe une unique paire $(Q_1, f(A_1))$ tq $A_1(X^2-2) = Q_1P + f(A_1)$ avec $\deg(f(A_1)) < \deg(P)$.
   Il existe une unique paire $(Q_2, f(A_2))$ tq $A_2(X^2-2) = Q_2P + f(A_2)$ avec $\deg(f(A_2)) < \deg(P)$.
   On en déduit que
$$(A_1 + \lambda A_2)(X^2-2) = (Q_1 + \lambda Q_2)P + f(A_1) + \lambda f(A_2) \tag{2}$$

avec $\deg(f(A_1)+\lambda f(A_2)) \leq \max(\deg(f(A_1)), \deg(f(A_2))) < \deg(P)$ ce qui montre que (2) est la division euclidienne de $(A_1+\lambda A_2)(X^2-2)$ par P et donc par unicité du reste que $f(A_1+\lambda A_2) = f(A_1)+\lambda f(A_2)$.

(b) Puisque f est linéaire, elle est injective si et seulement si ($f(A)=0 \Longrightarrow A=0$).
Soit donc $A \in E$ tel que $f(A)=0$.
Dans ce cas, le reste de la division euclidienne de $A(X^2-2)$ par P est nul. Ainsi, $P|A(X^2-2)$ et donc $P|A$ puisque par la question 1, $\mathsf{pgcd}(X^2-2,P)=1$ (Th de Gauss). Or puisque $A \in E$, on a $\deg(A) \leq 3 < 4 = \deg(P)$ et donc si $P|A$ nécessairement $A=0$.

3. (a) Puisque $\mathsf{pgcd}(X^2-2,P)=1$, par Th de Bezout, il existe des polynômes U et V tels que

$$(X^2-2)U + PV = 1 \tag{3}$$

ie. $(X^2-2)U = -VP+1$ avec $\deg(1) < \deg(P)$: il s'agit donc de la division euclidienne de $(X^2-2)U$ par P. Le reste de celle-ci vaut 1 et donc $f(U)=1$.

(b) Par définition f est surjective si $\forall B \in E$, $\exists A \in E$, $f(A)=B$.
Soit donc $B \in E$.
On déduit de la relation (3) qu'il existe U et V tels que $(X^2-2)UB = -BVP+B$ avec $\deg(B) \leq 3 < \deg(P)$, donc qu'il existe $A=UB$ tel que $f(A)=B$.
L'application est donc bijective de E dans E puisqu'elle est injective et surjective sur E.

4. (a) Calculons l'image de chaque vecteur de la la base $\mathcal{B}$ par f :
- ◇ $(X^2-2) = 0 \times (X^4-1) - 2 + X^2 \quad \Longrightarrow \quad f(1) = -2+X^2$
- ◇ $(X^2-2)X = 0 \times (X^4-1) - 2X + X^3 \quad \Longrightarrow \quad f(X) = -2X+X^3$
- ◇ $(X^2-2)X^2 = (X^4-1) + 1 - X \quad \Longrightarrow \quad f(X^2) = 1-X$
- ◇ $(X^2-2)X^3 = X(X^4-1) + X - X^3 \quad \Longrightarrow \quad f(X^2) = X-X^3$

On en déduit que $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Le résultat de 3b (f bijective), est équivalent à $\det(M) \neq 0$, ce qui est bien le cas puisque

$$\det(M) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Exercice 3.

1. Elle est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $P_1, P_2, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, elle vérifie
$(P_1+\lambda P_2, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(P_1+\lambda P_2)(a_k)Q(a_k) = \sum_{k=0}^{n} P_1(a_k)Q(a_k) + \lambda \sum_{k=0}^{n} P_2(a_k)Q(a_k) = (P_1,Q)+\lambda(P_2,Q)$.
Elle est donc linéaire par rapport à sa première variable.
Puisque $(P|Q) = (Q|P)$ elle l'est aussi par rapport à la seconde. C'est donc bien une forme bilinéaire.
Elle n'est pas alternée puisque $(P|Q) \neq -(Q|P)$.

2. On a $(P|P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^2(a_k) \geq 0$.

Ainsi, $(P|P)=0$ ssi $P(a_k)=0$ pour $k=0,\dots,n$ ssi $(X-a_k)|P$ pour $k=0,\dots,n$ donc ssi $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X-a_k)|P$

puisque les a_k sont 2 à 2 distincts. Or $\deg(P) = n = \deg(\prod_{k=0}^{n}(X - a_k))$ et donc $P = \alpha \prod_{k=0}^{n}(X - a_k)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitraire ie. $\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ (P|P) = 0\} = Vect(\prod_{k=0}^{n}(X - a_k))$.

3. (a) Posons $L_i = \alpha \prod_{k=0,k\neq i}^{n}(X - a_k)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $L_i(a_j) = 0$ si $i \neq j$ et il suffit donc de normaliser la famille pour que $L_i(a_i) = 1$ ce qui impose le choix de α. On obtient ainsi

$$L_i = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k} \tag{4}$$

La famille ainsi construite ayant $n + 1 = \dim(E)$ éléments, elle en constituera une base ssi elle est libre. Or, pour $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k = 0$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(x) = 0$. Mais pour $x = a_i$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(a_i) = \alpha_i = 0$ et donc de proche en proche $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$.

La famille considérée est donc une base de E.

(b) On a $(L_i|L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)L_j(a_k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}$.

4. Notons $\Psi : E \longrightarrow E^*$, $Q \mapsto \phi_Q$ qui est clairement bien définie.
• Montrons la linéarité :
il s'agit donc de prouver que si $Q_1, Q_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\Psi(Q_1+\lambda Q_2) = \Psi(Q_1)+\lambda\Psi(Q_2)$, c'est-à-dire pour tout $P \in E$, $\phi_{Q_1+\lambda Q_2}(P) = \phi_{Q_1}(P) + \lambda\phi_{Q_2}(P)$.
Or, $\phi_{Q_1+\lambda Q_2}(P) = (P|(Q_1 + \lambda Q_2)) = (P|(Q_1) + \lambda(P|(Q_2) = \phi_{Q_1}(P) + \lambda\phi_{Q_2}(P)$ et donc Ψ est bien linéaire de E dans E^*.
• Montrons la bijectivité :
Puisque $\dim(E) = \dim(E^*)$, il suffit de montrer l'injectivité de Ψ donc que si $\Psi(Q) = 0$ alors $Q = 0$.
Soit donc $Q \in E$ tel que $\Psi(Q) = 0$.
On peut décomposer Q dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ et il existe donc $q_0, \dots, q_n \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \sum_{k=0}^{n} q_k L_k$.
Or $\Psi(Q) = 0$ ssi $\phi_Q(P) = (P|Q) = 0$ pour tout $P \in E$ donc ssi $\sum_{k=0}^{n} q_k(P|L_k) = 0$ pour tout $P \in E$.
En particulier, pour $P = L_i$, on a $\sum_{k=0}^{n} q_k(L_i|L_k) = 0$ et donc $q_i = 0$ puisque par 3b, $(L_i|L_k) = \delta_{ij}$. On en déduit donc que $Q = 0$.

5. La base duale $(L_0^*, \dots, L_n^*)$ associée à $(L_0, \dots, L_n)$ est définie par les relations $L_i^*(L_j) = \delta_{ij}$, $0 \leq i, j \leq n$.
Puisque $L_j(a_k) = \delta_{jk}$, il suffit de poser $L_i^*(P) = P(a_i)$ pour tout $0 \leq i \leq n$ et tout $P \in E$ et on aura bien dans ce cas, $L_i^*(L_j) = L_j(a_i) = \delta_{ij}$.
Déterminons l'orthogonal G^0 de $G = Vect(\phi_{L_1}, \phi_{L_2})$ dans E. On a

$$\begin{aligned}
P \in G^0 = \{P \in E,\ \forall\phi \in G,\ \phi(P) = 0\} &\iff \phi_{L_1}(P) = (L_1|P) = 0 \text{ et } \phi_{L_2}(P) = (L_2|P) = 0 \\
&\iff P(a_1) = 0 \text{ et } P(a_2) = 0 \\
&\iff (X - a_1)|P \text{ et } (X - a_2)P = 0 \\
&\iff (X - a_1)(X - a_2)|P
\end{aligned}$$

On obtient donc $G^0 = (X - a_1)(X - a_2)\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

Exercice 4.

1. Par définition, pour $M = (m_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(M) = \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{\sigma(i)i}$.

2. La formule précédente donne $\det(A(X)) = \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}(X)$ et il s'agit donc bien d'un polynôme.

   Calculons sa dérivée :
$$\begin{aligned}(\det(A))' &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\Big(a_{\sigma(1)1}\dots a_{\sigma(n)n}\Big)' \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\sum_{i=1}^n a_{\sigma(1)1}\dots a_{\sigma(i-1)i-1}a'_{\sigma(i)i}a_{\sigma(i+1)i+1}\dots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}\dots a_{\sigma(i-1)i-1}a'_{\sigma(i)i}a_{\sigma(i+1)i+1}\dots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{i=1}^n \det(C_1|\dots|C_i'|\dots|C_n)\end{aligned}$$
   où les C_i sont les vecteurs colonnes associés à la matrice.

3. (a) On a $d_1 = 1+X$ et $d_2 = (1+X)^2 - 1 = X(X+2)$. Concernant d_3, on obtient
$$d_3 = \begin{vmatrix} 1+X & 1 & 1 \\ 1 & 1+X & 1 \\ 1 & 1 & 1+X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 0 & -X \\ 0 & X & -X \\ 1 & 1 & 1+X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 1 & 1 & 3+X \end{vmatrix} = X^2(X+3)$$

   (b) Explicitons $(\det(A))'$ de la question 2 dans le cas de d_n. On a
$$d_n'(X) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} 1+X & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1+X & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 1 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 0 & 1+X & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1+X \end{vmatrix}$$

   et développant par rapport à la i-ème colonne (celle ne contenant qu'un seul 1 situé sur la diagonale de la matrice), on trouve $d_n'(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^n d_{n-1}(X) = nd_{n-1}(X)$.

   (c) Pour tout $p \ge 2$, on a $d_p(0) = 0$ car pour $X = 0$, la matrice obtenue ne contient que des 1. En particulier, elle n'est pas de rang p et donc pas inversible et son déterminant est donc nul.
   Par dérivation de la formule précédente, on peut évaluer les dérivées successives de d_n en 0. On obtient successivement
$$\begin{aligned} d_n'(0) &= nd_{n-1}(0) = 0, \\ d_n''(0) &= n(n-1)d_{n-2}(0) = 0, \\ &\vdots \\ d_n^{(n-2)}(0) &= n(n-1)\dots 3d_2(0) = 0 \\ d_n^{(n-1)}(0) &= n(n-1)\dots 2d_1(0) \neq 0 \end{aligned}$$
   Ainsi, 0 est racine de multiplicité $(n-1)$ de d_n.

(d) On a $d_n(X) = \det(C_1(X)|\dots|C_n(X))$ et chaque colonne C_i contenant une fois et une seule le terme $(X+1)$, le terme dominant de d_n sera donné par $(X+1)^n$. Ainsi on en déduit que d_n est un plynôme unitaire de degré n.

La formule à montrer suggère de calculer $d_n(-n)$:

$$d_n(-n) = \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

où on a ajouté à la dernière colonne les $(n-1)$ premières. Ainsi, $d_n(-n) = 0$ et donc $(X+n)|d_n$. En conclusion, le polynôme d_n est divisible par $X^{n-1}(X+n)$ et donc ces deux polynômes sont associés puisque de même degré n. Etant unitaires, ils vérifient donc $d_n(X) = X^{n-1}(X+n)$.