UFR Sciences et Techniques
Université Bourgogne Franche-Comté

11 et 12 Juin 2018, à Besançon

Mathématiques

RÉGION BOURGOGNE FRANCHE COMTE

UBFC UNIVERSITÉ BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BOURGOGNE

(LmB) laboratoiredemathématiquesdebesançon
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ • CNRS • UMR 6623

Sponsors

(LmB)
laboratoiredemathématiquesdebesançon
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ • CNRS • UMR 6623

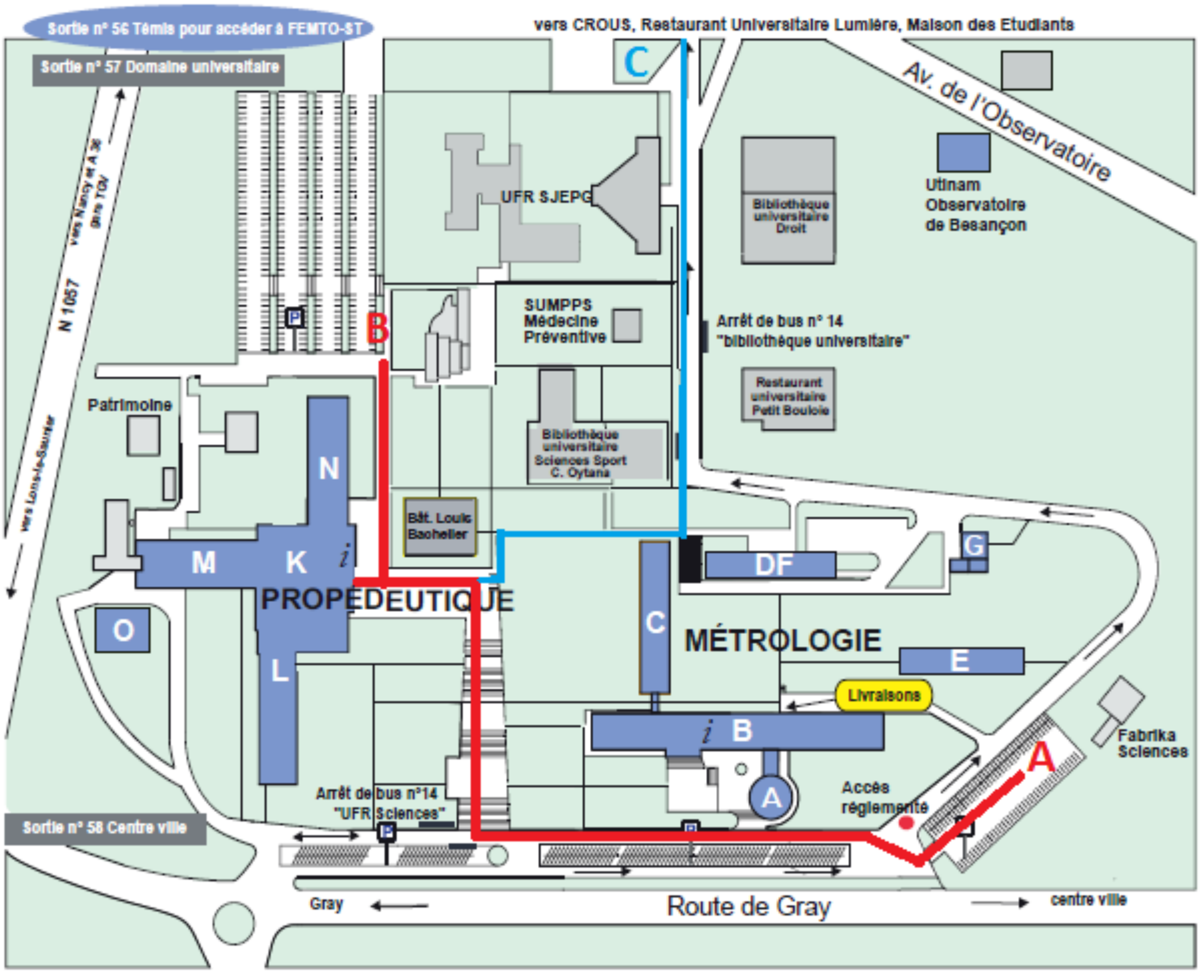
cnrs
INSMI
Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions

SMAI

Institut UTINAM

cnrs

Plan d'accès



A : parking + départ et arrivée du bus
B : parking
C : Restaurant Universitaire
K : Hall du Propédeutique, amphithéâtres Croisot, Jacquemain et Duffieux

XIXᴱ Journées de l'École Doctorale Carnot-Pasteur

Société mathématique de France

Société Française de Physique

Société Chimique de France

Programme de la première journée

Lundi 11 Juin 2018 - Bâtiment Propédeutique

07 h 30 Départ du bus de Dijon

09 h 15 Accueil des participants avec viennoiseries et café

10 h 00 Ouverture des journées

10 h 15 **Conférence de Sylvain PICAUD (Besançon - Institut UTINAM)** :
"L'eau à basse température... un monde encore bien mal connu"

11 h 30 **Conférence de Claude LE BRIS (Paris - École des Ponts & Inria)** :
"Modélisation des matériaux : de l'Angström au mètre en passant par les mathématiques"

12 h 30 Déjeuner

14 h 00 **Conférence de Pierre ADAM (Strasbourg - Institut de Chimie)** :
"Étude des substances et matériaux organiques trouvés en contexte archéologique : une approche moléculaire et isotopique"

15 h 15 **Conférence de Sarah BENCHABANE (Besançon - Institut FEMTO-ST)** :
"Surface coupled phononic resonators"

16 h 15 Session Posters

17 h 45 Buffet

19 h 00 Départ du bus pour Dijon

Informations pratiques pour la journée

Accueil, pauses, session posters et buffet : dans le hall du bâtiment Propédeutique
Déjeuner : Restaurant Universitaire Lumière
Conférences : amphithéâtre Croisot du bâtiment Propédeutique

Programme des Communications Orales

Mardi 12 Juin 2018

8 H 30	**CO1. Isabelle Baraquin (LMB) :** "Introduction to compact quantum groups"
9 H 00	**CO2. Muhammad Umar Dauda (IMB) :** "Numerical study of blow-up in Davey-Stewartson I systems"
9 H 40	PAUSE
10 H 30	**CO3. Benjamin Bobbia (LMB) :** "The proportionnal tail framework for extreme"
11 H 00	**CO4. Olga Assainova (IMB) :** "Study of the “dbar" problems"
11 H 30	**CO5. Sheng-Sen Lu (LMB) :** "Some results on nonlinear Kirchhoff equations"
12 H 00	REPAS
14 H 00	**CO6. Xumin Wang (LMB)** : "Markov semigroups on the quantum spheres"
14 H 30	**CO7. Giridhar Kulkarni (IMB) :** "An introduction to the quantum inverse scattering method"
15 H 00	**CO8. Antonio J. Fernàndez (LMB)** : "On a class of elliptic problems with quadratic growth in the gradient"
15 H 30	Délibérations du jury
16 H 00	Annonce des résultats
18 H 15	Départ du bus pour Dijon

Informations pratiques pour la journée

Accueil, pauses, session posters et buffet : dans le hall du bâtiment Propédeutique
Déjeuner : Restaurant Universitaire Lumière
Conférences : amphithéâtre Duffieux du bâtiment Propédeutique

Résumés des conférences plénières

1ère conférence : Sylvain PICAUD (Besançon - Institut UTINAM)

sylvain.picaud@univ-fcomte.fr

L'eau à basse température... un monde encore bien mal connu

L'eau est une molécule simple. Elles possèdent pourtant des propriétés surprenantes qui font, encore de nos jours, l'objet de nombreux travaux de recherche. Par exemple, dans les conditions usuelles de température et de pression, l'eau est un liquide peu dense ; une grand partie du volume de l'eau liquide est en effet formée de cavités. Le volume occupé par ces cavités varie de manière tout à fait anormale à basse température. D'abord l'eau liquide se dilate lorsqu'on la refroidit en dessous d'une température appelée "température du maximum de densité". Ensuite, elle se dilate encore en cristallisant, contrairement à la plupart des liquides. Cette diminution de densité explique pourquoi la glace flotte sur l'eau. De même, à basse température, l'application d'une pression accroît la fluidité et favorise le liquide par rapport au solide. Cet effet anormal de la pression permet à l'eau de rester fluide lorsqu'elle est confinée dans des pores nanométriques, contrairement aux autres liquides qui se solidifient sous l'effet des pressions de confinement. Cette persistance de l'état fluide est capitale pour le fonctionnement des cellules biologiques. L'eau à basse température, que le grand public désigne communément sous le terme "glace" constitue, en réalité, un monde complexe, encore mal connu aujourd'hui. L'exposé se propose donc de faire le point sur la description, à l'échelle moléculaire, des propriétés de l'eau à basse température, en particulier par le biais des simulations numériques.

2ème conférence : Claude LE BRIS (Paris - École des Ponts & Inria)

lebris@cermics.enpc.fr

Modélisation des matériaux : de l'Angström au mètre en passant par les mathématiques

La science des matériaux moderne ne peut se concevoir que comme un mariage de la mécanique, de la physique, de la chimie, et des mathématiques. Comprendre les matériaux, dans toute leur complexité, implique aujourd'hui de savoir les simuler sur ordinateur, le plus souvent à plusieurs échelles, très différentes les unes des autres. Il est en effet fréquent de dire que la mécanique du 19ème siècle était celle du mètre, que celle du 20ème siècle était celle du millimètre ou du micron, et que celle du 21ème siècle sera sans doute possible celle du nanomètre. Simuler numériquement l'interaction de toutes ces échelles nécessite de comprendre les matériaux dans tous leurs aspects. Les disciplines en jeu sont la physique pour les phénomènes élémentaires, la chimie quantique pour la structure électronique, la dynamique moléculaire ou atomistique pour les grandeurs thermodynamiques ou statistiques, et la mécanique pour toutes les échelles continues. Cela requiert aussi de disposer, à chaque échelle, de modèles mathématiques à la fois réalistes, fiables dans leur nature théorique, et se prêtant a une analyse numérique d'erreur, seule capable de certifier les résultats obtenus et conférer aux simulations un caractère prédictif. L'exposé présentera plusieurs exemples d'intérêt pratique majeur, où l'étude mathématique, la modélisation et la simulation numérique permettent des avancées cruciales.

3ème conférence : Pierre ADAM (Strasbourg - Institut de Chimie)

padam@unistra.fr

Étude des substances et matériaux organiques trouvés en contexte archéologique : une approche moléculaire et isotopique

Des substances organiques sont fréquemment trouvées en contexte archéologiques. Elles comprennent, par exemple, des enduits, des adhésifs, des baumes, des cosmétiques, des résidus dans des céramiques, ou encore des restes alimentaires. Ces substances organiques sont susceptibles de recéler des informations archéologiques concernant les coutumes, les régimes alimentaires, les technologies, les échanges commerciaux et les pratiques religieuses des populations à l'origine de ces substances. Les sols provenant de sites archéologiques recèlent également des constituants organiques provenant de l'environnement immédiat du site lors de son occupation passée qui peuvent servir d'indicateurs quant à la nature de l'ancienne couverture végétale, de son évolution dans le temps, ou encore sur l'usage de ces sols (pratiques agricoles, notamment). Il est possible d'accéder à ces informations archéologiques par une approche moléculaire – appelée « archéologie moléculaire » – qui repose sur l'identification des constituants moléculaires de ces substances organiques et qui permet de remonter à leurs sources biologiques précises même dans le cas de substances composites et en dépit des transformations subies lors de leur préparation par vieillissement au cours du temps. A cet égard, et au-delà de l'identification des produits naturels utilisés pour préparer ces substances, l'étude des transformations subies par les substances organiques archéologiques permet également de reconstituer leur mode de préparation ou leur usage. Enfin, l'archéologie moléculaire a bénéficié d'approches analytiques complémentaires, comme la détermination de la composition isotopique $^{13}C/^{12}C$ ou D/H au niveau moléculaire, qui fournissent des informations sur leur origine géographique et biologique ou sur le mode de préparation de ces substances. Elle bénéficie également de l'évolution des techniques de datation au ^{14}C par AMS permettant des mesures d'âges sur des quantités de l'ordre de la dizaine de µg de C_{org}. Quelques exemples d'études moléculaires et isotopiques de substances archéologiques seront présentés. Ils porteront, notamment, sur l'étude de substances utilisées à différentes époques comme adhésifs ou comme enduits pour le calfatage des navires, sur le développement d'outils moléculaires permettant d'identifier l'essence de bois utilisée pour préparer un artefact même si le bois est trop altéré pour pouvoir être identifié sur une base morphologique, ou encore sur l'étude de la matière organique de sols ayant comblé une structure archéologique mise au jour à Obernai (Alsace) et datant de l'époque romaine.

4ème conférence : Sarah BENCHABANE (Besançon - Institut FEMTO-ST)

sarah.benchabane@femto-st.fr

Surface coupled phononic resonators

In this era of micro- and nano-technology, mechanical resonators have again emerged as rich physical objects now at the core of thriving research fields such as micro- and nano-mechanical systems (MEMS/NEMS) or optomechanics. This resurgence of interest has been partly motivated by the prospects opened by the realization of high-quality factor mechanical resonators at the micro- or nano-scale with tailorable properties. In addition to their obvious use as low-mass objects allowing for the realization of highly sensitive detectors ranging from motion sensors or accelerometers to chemical or biological detectors, MEMS/NEMS resonators open exciting vistas for the investigation of basic quantum mechanical concepts. These last decades have also witnessed considerable breakthrough in the management of the propagation waves of any sort through the fabrication and use of materials exhibiting featuring artificial structures, periodic or not, leading to the rich field of metamaterials. In this talk, we will illustrate of these two approaches can be used to control the propagation of acoustic or elastic waves, down to the microscale. After an introduction of the phononic crystal and local resonance concepts, we will focus on experimental demonstrations of confinement and manipulation of the elastic energy in micron-scale resonators exhibiting dimensions at least ten times smaller than the excitation wavelength. We will try to demonstrate that such an approach could make it possible to conceive phononic chains capable to carry the elastic energy along the most twisted paths.

Résumés des posters

P26. Benjamin BOBBIA (LMB, Université Bourgogne Franche-Comté)
benjamin.bobbia@univ-fcomte.fr

Extreme quantile regression in proportionnal tail framework

Take $Y \in \mathbb{R}$ and $X \in \mathbb{R}^p$ and a sample of i.i.d copies of (X, Y). We are interested in extreme quantile regression, that is estimation of the conditional quantile of Y given $X = x$ of order $1 - p$ for small $p > 0$. We consider the proportional tail model where Y has an heavy tail $\bar{F}$ with extreme value index $\gamma > 0$ and the conditional tails $\bar{F}_x$ are asymptotically equivalent to $\sigma(x)\bar{F}$.
We propose estimators for γ and the integral of σ and prove their consistency and asymptotic normality. This works is strongly connected to the statistics of heteroscedastic extremes developped by Einmahl, deHaan and Zhou. Our approach relies on coupling arguments and empirical processes with random sample size.

Références

[1] Einmahl, John H. J. and de Haan, Laurens and Zhou, Chen. *Statistics of heteroscedastic extremes*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B. Statistical Methodology, 78, 2016, p 31-51.

P27. Lucie DELCEY (LMB, Université Bourgogne Franche-Comté)
lucie.delcey@univ-fcomte.fr

Bifurcations of periodic waves at the onset of instability for the Lugiato-Lefever equation

We consider the Lugiato-Lefever equation :

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - (1+i\alpha)\psi + i\psi|\psi|^2 + F,$$

where ψ is a complex valued function depending on the time t and the space variable x, α is a detuning parameter, $F > 0$ is a pump term and $\beta \in \mathbb{R}^*$ is a dispersion parameter. This equation is closed to the non linear Schrödinger equation, including detuning and pumping term, and has been derived in several contexts in non linear optics. We are interested in the existence of steady periodic solutions. Starting from a detailed stability analysis of constant solutions, we determine critical values of parameters where bifurcation of periodic solutions occur. We analyse in detail the onset of Turing instability. This bifurcation analysis relies upon a center manifold reduction.

Références

[1] Godey, C., A bifurcation analysis for the Lugiato-Lefever equation, Eur. Phys. J. D, 2017,

[2] Haragus, M. and Iooss, G., Local bifurcations, center manifolds, and normal forms in infinite-dimensional dynamical systems. Springer Science & Business Media, 2010,

[3] Lugiato L. A. and Lefever R., Spatial dissipative structures in passive optical systems. Physical review letters, 58(21), 2209, 1987,

[4] Miyaji, T. and Ohnishi, I. and Tsutsumi, Y., Bifurcation analysis to the Lugiato-Lefever equation in one space dimension, Physica D. Nonlinear Phenomena, 2010

Résumés des exposés

CO1. Isabelle BARAQUIN (LMB, University Bourgogne Franche-Comté)

isabelle.baraquin@univ-fcomte.fr

Introduction to compact quantum groups

Quantum groups have been widely studied in the last fifty years. There are different approaches, but there is always a common point : quantum groups are seen as some generalization of classical groups.

For every compact group, we can define the algebra of continuous functions. It is a commutative C^*-algebra. And conversely, the Gelfand-Naimark Theorem ensures that every commutative C^*-algebra can be seen as the algebra of continuous functions on a compact group. The quantum groups arise when the C^*-algebra is no more commutative.

In this talk, we will present how some fundamental properties of compact groups are translated to define compact quantum groups, and give examples of these groups.

CO2. Muhammad UMAR DAUDA (IMB, Université Bourgogne Franche-Comté)

umar-dauda_muhammad@etu.u-bourgogne.fr

Numerical study of blow-up in Davey-Stewartson I systems

Davey-Stewartson equations appear in the study of many non-linear wave phenomena, for instance in water waves and nonl-inear optics. They describe approximatively the modulation of plane waves in these settings. We present a detailed numerical study of blow-up, i.e., a divergence of the solution in finite time, for smooth initial data. It is shown that the blow-up is self similar and follows the known pattern of blow-up in L^2 critical non-linear Schrödinger equations.

Références

[1] A. Davey and K. Stewartson. *On 3-dimensional surface waves*, Proc. R. Soc. London. A338 (1974).

[2] C. Klein and N. Stoilov. *Numerical study of blow-up Mechanisms for Davey-Stewartson II System*. Analysis of PDEs (math.AP), 2017.

[3] F. Surname. *Title of the publication*. Journal, date.

[4] P.W. WHITE and J.A.C. WEIDEMAN. *Numerical simulations of dromions in the Davey-Stewarstson System*. Department of Mathematics, Oregon state university, Corvallis, 97331-4606 (1994).

[5] C. BESSE, C. BRUNEAU. *Numerical study of the elliptic-Hyperbolic DS and Blow-UP*. Mathematical Model and Methods in Applied sciences, Vol.8, No. 8 (1998) 1363-1386.

CO3. Benjamin BOBBIA (LMB, Université Bourgogne Franche-Comté)
benjamin.bobbia@univ-fcomte.fr

The proportionnal tail framework for extreme

Take $Y \in \mathbb{R}$ and $X \in \mathbb{R}^p$ and a sample of i.i.d copies of (X, Y). We are interested in extreme quantile regression, that is estimation of the conditional quantile of Y given $X = x$ of order $1 - p$ for small $p > 0$. We consider the proportional tail model where Y has an heavy tail $\bar{F}$ with extreme value index $\gamma > 0$ and the conditional tails $\bar{F}_x$ are asymptotically equivalent to $\sigma(x)\bar{F}$.
In this talk we will focus on the presentation of the proportionnal tail framework and the estimation of parameters. We propose estimators for γ and the integral of σ and prove their consistency and asymptotic normality using coupling approach.

Références

[1] Einmahl, John H. J. and de Haan, Laurens and Zhou, Chen. *Statistics of heteroscedastic extremes*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B. Statistical Methodology, 78, 2016, p 31-51.

CO4. Olga ASSAINOVA (IMB, Université Bourgogne Franche-Comté)

Olga.Assainova@u-bourgogne.fr

Study of the "dbar" problems[1]

Integrable systems has been vastly studied in the XX century. Throughout this time a large number of the powerful methods were developed. Probably one of the most efficient is the inverse scattering method. We will briefly introduce the details and show how this method can be implemented in the case of the two-space dimensional Davey-Stewartson (DS) system and how the announced "dbar" problem appears in this context. Taking in account the connection between one-dimensional non-linear Shrödinger equation and DS we want to introduce a small parameter ε into the equation, thus, to study it asymptotically in the semiclassical limit and computing its WKB approximation. It will be shown that semiclassical limit of the problem can be used not only as a tool that provides some new understanding and perspectives of the problem but also as a algorithmic way of constructing solutions. Finally, to speak about some applications one will see that "dbar" problems play central role in the medical imaging, namely Electric Impedance Tomography.

Références

[1] Arkadiev, V.A., Pogrebkov, A.K., and Polivanov, M.C. *Inverse scattering transform and soliton solution for Davey–Stewartson II equation*. 1989.

[2] A, C. Klein, K. McLaughlin, P. Miller. *Study of the Direct Spectral Transform for the Defocusing Davey-Stewartson II Equation in the Semiclassical Limit*. 2018.

[1] Based on a joint work with C. Klein, K. McLaughlin, P. Miller

CO5. Sheng-Sen LU (Tianjin University, China)
sslu@tju.edu.cn

Some results on nonlinear Kirchhoff equations

The speaker will talk about the following nonlinear Kirchhoff equations

$$-\left(a + b\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = f(u). \tag{$\mathcal{K}$}$$

Here $a \geq 0$, $b > 0$ are constants, $N \geq 1$, and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an odd continuous function. Solutions of Problem ($\mathcal{K}$) are searched in $H^1(\mathbb{R}^N)$ the space of functions $u(x)$ which satisfy $u(x)$, $\nabla u(x) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Some existence and multiplicity results will be presented, which depend essentially on a, b and N. This talk is based on [1].

Références

[1] S.-S. Lu. *An autonomous Kirchhoff-type equation with general nonlinearity in* $\mathbb{R}^N$. Nonlinear Anal. RWA, 2017.

CO6. Xumin WANG (LMB, Université Bourgogne Franche-comté)
xumin.wang@univ-fcomte.fr

Markov semigroups on the quantum spheres

This is a joint work with U.Franz and B.Das.

In order to save many mathematics problems, such as the dual of a non-ablian group, recently many mathematicians generalize groups to more abstract things, called "Quantum Groups". Here is the definition of **Compact Quantum Group** which is first given by S.L.Woronowicz [1] :

Definition 1 *Let A be a unital C^*-algebra. If there exists a unital *-homomorphism $\Delta : A \to A\otimes A$ such that $(\Delta\otimes id)\Delta = (id\otimes\Delta)\Delta$ and $\Delta(A)(1\otimes A)$, $\Delta(A)(A\otimes 1)$ are linearly dense in $A\otimes A$, then (A,Δ) is called a compact quantum group and Δ is called the comultiplication on A. We denote $\mathbb{G} = (A,\Delta)$ and $A = C(\mathbb{G})$.*

Suzhou Wang[2] gave a definition of free orthogonal quantum group : Let $C(O_N^+)$ be a universal C^*-algebra generated by $(u_{ij})_{1\le i,j\le N}$ satisfying that the matrix $u = (u_{ij})_{1\le i,j\le N}$ is unitary and $u_{ij}^* = u_{ij}$. Define the comultiplication $\Delta u_{ij} = \sum_{k=1}^N u_{ik}\otimes u_{kj}$. The pair $(C(O_N^+),\Delta)$ is called **Free Orthogonal Quantum Group**.

T.Banica [3] talked about free sphere $S^{N-1}_{\mathbb{R},+}$ (and half-liberated sphere $S^{N-1}_{\mathbb{R},*}$) which can be regarded as a subalgebra of $C(O_N^+)$ (respectively, $C(O_N^*)$). Our research work consider about the Markov Semigroups on the classical, half-liberated and free spheres. Markov semigroups is a sequence of linear operator $(T_t)_{t\ge 0}$ satisfying $T_t\circ T_s = T_{t+s}$, $T_t(1) = 1$ and T_t is completely positive. The following is our main result which gives the eigenvalues of Markov Semigroups :

Theorem 1 *For any O_N^+-invariant strongly continuous Markov semigroup $(T_t)_{t\ge 0}$ on sphere $Pol(S_+^{N-1})$, there exists a pair (b,ν), with b a positive number and ν a finite measure on $[-1,1]$, such that for any $t\ge 0$,*

$$T_t(x_s) = e^{t\lambda_s}x_s, \qquad \forall x_s\in D_s,$$

where

$$\lambda_s = -b(q_s)'(1) + \int_{-1}^{1}\frac{q_s(x)-1}{x-1}\mathrm{d}\nu(x).$$

Here $(q_s)_{s\in\mathbb{N}}$ is the family of orthogonal polynomial w.r.t Haar state h, i.e. $h(q_s(x_1)q_t(x_1)) = 0$ with $t\ne s$. The eigenspace is defined by $D_s = H_s\cap H_{s-1}^{\perp}$ where $H_s = span(x_{i_1}\cdots x_{i_r}|r\le s)\subset Pol(S_+^{N-1})$.

Références

[1] S.L. Woronowicz. *Compact matrix pseudogroups.* Communications in Mathematical Physics, 111(4) :613–665, 1987

[2] S. Wang. *General constructions of compact quantum groups.* PhD these,1993.

[3] T. Banica. *Quantum isometries, noncommutative spheres, and related integrals.* arXiv preprint arXiv :1601.02159, 2016.

CO7. Giridhar KULKARNI (IMB, Université Bourgogne Franche-Comté)
giridhar.kulkarni@u-bourgogne.fr

An introduction to the quantum inverse scattering method

The inverse scattering methods were developed to solve the non-linear partial differential equations. A particular exapmle of it is the Lax representation for the non-linear Schrodinger equation

$$i\partial_t \Psi = -\partial_x^2 + 2c\Psi^\dagger \Psi\Psi$$

constructed by Zakharov and Shabat [1]. The quantum version of the inverse scattering method was then developped by Fadeev, Sklyanin and Takhtajan [2, 3] by constructing quantum L-operators which satisfies the Quantum Yang-Baxter equation giving us the algebraic formulation of the Bethe's ansatz. But this formalism also has direct links with exactly solvable models in the classical statistical mechanics and the conformal field theory on one hand while on the other hand, it has direclty led to some important developpements in Mathematics such as that of quantum groups, Yangians and quantum affine algebras etc., which remains active areas research even today. In this talk, I will give a brief introduction to this method.

Références

[1] V.E. Zakharov, A.B. Shabat. *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-moduation of waves in nonlinear media*. Sov, Phys. JETP 34, 62-9, (1971).

[2] L.D. Fadeev, E.K. Sklyanin, L.A. Takhtajan. *Quantum inverse scattering problem method I*. Theor. Math. Phys. 40, 688-706, (1980).

[3] E.K. Sklyanin. *Quantum version of the inverse scattering problem*. J. Sov. Math. 19, 1546-96, (1978).

[4] N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin, V.E. Korepin. *Quantum inverse scattering method and correlation functions*. Cambridge Monograms on Mathematical Physics, (1993).

CO8. Antonio J. FERNÁNDEZ (LMB, Université Bourgogne Franche-Comté and LAMAV, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis)

antonio_jesus.fernandez_sanchez@univ-fcomte.fr

On a class of elliptic problems with quadratic growth in the gradient

This talk focus on the boundary value problem

$$\begin{cases} -\Delta u = c(x)u + \mu(x)|\nabla u|^2 + h(x), & \text{in } \Omega\,, \\ \quad u = 0, & \text{on } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Solutions are searched in the function space $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, a bounded domain with smooth boundary. It is assumed that c, h belong to $L^p(\Omega)$ for some $p > N/2$ and μ belongs to $L^\infty(\Omega)$.

In the case where $c(x) \leq \alpha_0 < 0$, now referred to as the *coercive case*, this problem has been studied since the 80's and the existence of an unique solution is the rule. Recently other cases, in particular assuming that $c(x) \geq 0$ or that $c(x)$ changes sign, started to be considered. We shall present some of the main contributions in these *non-coercive cases*. We will see that both existence and uniqueness may now be lost.

The talk is based in joints works with Colette De Coster (Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis) and Louis Jeanjean (Université de Franche-Comté).