# Introduction au groupe fondamental

Guillaume Gandolfi

31 Mars 2017

# Notations

Dans tout ce qui suit $(X, \tau_X)$ et $(Y, \tau_Y)$ seront des espaces topologiques qu'on notera de manière abusive $X$ et $Y$.

**Définition**

*Si $f, g : X \to Y$ sont deux applications continues, on dit que $f$ est homotope à $g$ s'il existe une fonction continue*

$$F : [0,1] \times X \to Y$$

*telle que :*

$$F(0,.) \equiv f \text{ et } G(1,.) \equiv g.$$

*$F$ est alors appelée homotopie de $f$ vers $g$ et on note alors $F : f \cong g$ (ou $f \cong g$ si on ne veut pas préciser $F$).*

# Homotopie

## Définition

*Si* $A \subseteq X$ *et* $f \equiv g$ *sur* $A$*, on dit que* $f$ *est homotope à* $g$ *relativement à* $A$ *si*

$$F : f \cong g$$

*avec :*

$$F(t, .) \equiv f \equiv g \text{ sur } A \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

*On écrit alors* $F : f \cong g \operatorname{rel} A$*.*

**Exemple**

*Soit* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *un ensemble étoilé par rapport à un point* $x_0$ *alors :*

$$F : Id_C \cong x_0 \ (\mathrm{rel}\ x_0\ )$$

*via :*

$$F : (t, x) \mapsto tx_0 + (1 - t)x.$$

# Homotopie

**Proposition**

*Si* $A \subseteq X$ *alors être homotope relativement à* $A$ *est une relation d'équivalence.*

# Type d'homotopie

**Définition**

*On appelle $X$ et $Y$ ont même type d'homotopie s'il existe des fonctions $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ continues telles que :*

$$\begin{cases} f \circ g \cong Id_Y \\ g \circ f \cong Id_X. \end{cases}$$

*On dit alors que $f$ et $g$ sont des équivalences d'homotopie.*

### Exemple

*Pour tout entier* $n \geq 0$, *soit* $S^n$ *la sphère unité de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *et* $E_{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$.
*Alors* $S^n$ *et* $E_{n+1}$ *ont même type d'homotopie ;*
*en effet si on note* $f$ *l'injection canonique de* $S^n$ *dans* $E_{n+1}$ *et* $g$ *l'application de* $E_{n+1}$ *dans* $S^n$ *définie par :*

$$g(x) = \frac{x}{||x||}, \text{ pour tout } x \neq 0$$

*alors on a :* $g \circ f = Id_{S^n}$ *et* $f \circ g \cong Id_{E_{n+1}}$ *via l'homotopie :*

$$F : (t, x) \mapsto tx + (1 - t)\frac{x}{||x||}.$$

# Lacets et homotopie de lacets

**Définition**

*Soit* $x_0 \in X$*, on appelle lacet de base* $x_0$ *tout tout chemin continu* $\gamma : [0,1] \to X$ *vérifiant* $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$.

**Définition**

*Soient* $x_0 \in X$ *et* $\alpha, \beta$ *deux lacets de base* $x_0$*, on dit (abusivement) que* $\alpha$ *et* $\beta$ *sont homotopes s'ils sont homotopes relativement à* $\{0,1\}$ *et on note (abusivement)* $\alpha \cong \beta$.

**Définition**

*Soient* $x_0 \in X$ *et* $\alpha, \beta$ *deux lacets de base* $x_0$ *;*

- *Le lacet inverse de* $\alpha$ *est le lacet* $\overline{\alpha} : t \mapsto \alpha(1-t)$
- *Le lacet composé de* $\alpha$ *et* $\beta$ *est le lacet*
  $$\alpha.\beta : t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) \text{ si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

### Proposition

*Soient $x_0 \in X$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et $\beta_1, \beta_2$ deux lacets de base $x_0$. On note $c_{x_0}$ le lacet constant égal à $x_0$. Alors :*

1. *Si $\alpha_1 \cong \alpha_2$ et $\beta_1 \cong \beta_2$ alors $\alpha_1.\beta_1 \cong \alpha_2.\beta_2$*
2. *Si $\alpha_1 \cong \alpha_2$ alors $\overline{\alpha_1} \cong \overline{\alpha_2}$*
3. $(\alpha_1.\alpha_2).\alpha_3 \cong \alpha_1.(\alpha_2.\alpha_3)$
4. $c_{x_0}.\alpha_1 \cong \alpha_1.c_{x_0} \cong \alpha_1$
5. $\alpha_1.\overline{\alpha_1} \cong \alpha_1.\overline{\alpha_1} \cong c_{x_0}$

### Corollaire

*Soient $x_0 \in X$ et $E$ l'espace quotient des lacets de base $x_0$ modulo la relation d'homotopie. On note $[\gamma]$ la classe d'un lacet $\gamma$ de $X$. Alors si $A, B$ sont deux classes et si $\alpha \in A, \beta \in B$, la quantité $A.B = [\alpha.\beta]$ est bien définie et l'opération ainsi obtenue fait de $E$ un groupe.*

**Définition**

*Le groupe ainsi défini se note* $\pi_1(X, x_0)$ *et est appelé groupe fondamental de l'espace topologique* $X$ *pointé en* $x_0$.

**Proposition**

*Si $X$ est connexe par arcs alors $\pi_1(X, x_0)$ ne dépend pas du point $x_0$ (à isomorphisme près).*

**Proposition**

*Soit $x_0 \in X$. Si $f : X \to Y$ est continue alors l'application :*

$$\begin{array}{rcrcl} \pi_1(f) & : & \pi_1(X, x_0) & \to & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ & & [\gamma] & \mapsto & [f \circ \gamma] \end{array}$$

*est bien définie et est un morphisme de groupes.*
*Si de plus $f$ est une équivalence d'homotopie alors $\pi_1(f)$ est un isomorphisme.*

**Exemple**

*Si* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *un ensemble étoilé par rapport à un point* $x_0$ *alors* $\pi_1(C, x_0) = \{[c_{x_0}]\}$*, en effet tout lacet* $\gamma$ *est homotope à* $c_{x_0}$ *via :*

$$\begin{array}{rcccl} F & : & [0,1] \times C & \to & C \\ & & (s,t) & \mapsto & sx_0 + (1-s)\gamma(t). \end{array}$$

**Exemple**

*Si* $n$ *est un entier supérieur à 2 et* $x_n = (1, \underbrace{0, ..., 0}_{n \text{ fois}}) \in \mathbb{R}$*, alors*

$\pi_1(S^n, x_n) = \{[c_{x_n}]\}$.

**Théorème**

*Soient* $x_1 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ *et* $L^1$ *l'ensemble des lacets de* $S^1$ *de base* $x_1$*. Alors :*

(1) *Il existe une application :*

$$\begin{array}{cccc} \deg & : & L^1 & \to & \mathbb{Z} \\ & & \gamma & \mapsto & \deg(\gamma) \end{array}$$

*telle que deux lacets* $\alpha, \beta$ *soient homotopes si et seulement si* $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$*.*
*L'application :*

$$\begin{array}{cccc} \overline{\deg} & : & \pi_1(S^1, x_1) & \to & \mathbb{Z} \\ & & [\gamma] & \mapsto & \deg(\gamma) \end{array}$$

*est donc bien défini.*

(2) $\overline{\deg}$ *est un isomorphisme de groupes.*

# $\pi_1(S^1)$

**Définition**

*Si* $\gamma$ *est un lacet de* $S^1$ *de base* $x_1$*, la quantité* $\deg(\gamma)$ *est appelée degré du lacet* $\gamma$*. Elle correspond intuitivement au nombre de tours orientés que fait le lacet autour de l'origine.*

**Proposition**

*Si* $\gamma$ *est un lacet de* $S^1$ *de base* $x_1$ *qui est de classe* $C^1$ *alors :*

$$\deg(\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{Ind}_\gamma(0).$$

# Applications de $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

**Théorème (D'Alembert-Gauß)**

*Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

**Démonstration.**

Soit $p = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme sans racine dans $\mathbb{C}$. Alors :

- Puisque $p$ n'a pas de racines dans $S^1$, $\gamma : t \in [0,1] \mapsto \frac{p(e^{2i\pi t})}{|p(e^{2i\pi t})|}$ est bien défini et est un lacet de $S^1$ de base $x_1$,
- Puisque $p$ n'a pas de racines dans $\mathring{\mathrm{B}}(0,1)$, $(s,t) \mapsto \frac{p(se^{2i\pi t})}{|p(se^{2i\pi t})|}$ est une homotopie bien définie de $\gamma_0 \equiv \frac{a_0}{|a_0|}$ vers $\gamma$,
- Puisque $p$ n'a pas de racines dans $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{B}}(0,1)$, $(s,t) \mapsto \frac{s^n p(e^{2i\pi t}/s)}{|s^n p(e^{2i\pi t}/s)|} = \sum_{k=0}^{n} s^{n-k} a_k X^k$ est une homotopie bien définie de $\gamma_n = t \mapsto \frac{a_n}{|a_n|} e^{2i\pi nt}$ vers $\gamma$.

Donc $n = \deg \gamma_n = \deg \gamma_0 = 0$. $\square$

# Applications de $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

**Théorème (Point fixe de Brouwer (version faible))**

*Soit $B = \overline{\mathrm{B}}(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$. Toute application continue de $B$ dans $B$ admet un point fixe.*

**Théorème (Borsuk-Ulam (version faible))**

*Pour toute application continue $f$ de $S^2$ dans $\mathbb{R}^2$ il existe $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

**Théorème (Invariance de la dimension (version faible))**

*Soit $n \in \{1, 2\}$ et $m$ un entier distinct de $n$ alors aucun ouvert de $\mathbb{R}^m$ n'est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*