Université de Franche-Comté
Licence de Mathématiques, Semestre 3, 2019-20

Polynômes et Algèbre Linéaire
Interrogation n^{o}1
Durée 1h20

Exercice 1.
Les questions 1, 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que 1 et 2 sont racines de P si et seulement si $(X-1)(X-2)$ divise P.
2. On considère les polynômes $A = X^3 + X$,
   $P = X^{13} + X^{11} - X^{10} - X^8 + X^5 + 2X^3 + X$,
   et $Q = X^{10} - X^7 + X^2 + 1$.
   (a) A est-il un diviseur commun à P et Q ?
   (b) Que valent $\mathsf{pgcd}(A, P)$ et $\mathsf{pgcd}(A, Q)$?
3. Déterminer les racines complexes du polynôme $P = X^2 + (3i - 4)X + 1 - 7i \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 2.
Soient $P = X^3 + 2X + 1$ et $Q = X^4 + X^2 + X - 2$.

1. Montrer que P et Q sont premiers entre eux.
2. Déterminer des polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 3.
Les polynômes suivants sont-ils irréductibles (justifier) ?

1. $P_1 = X^2 - 4X + 5$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$
2. $P_2 = X^8 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
3. $P_3 = X^2 - 4X - 5$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{Q}[X]$

Exercice 4.
Soit $P = X^4 - 1$.

1. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.
2. Déterminer la factorisation de P en produit de polynômes irréductibles :
   (a) de $\mathbb{C}[X]$
   (b) de $\mathbb{R}[X]$.
3. En déduire la factorisation de $Q = \sum_{k=0}^{3} X^k$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Université de Franche-Comté
Licence de Mathématiques, Semestre 3, 2018-19

POLYNÔMES ET ALGÈBRE LINÉAIRE
Correction de l'interrogation n^{o}1

Exercice 1.

1. On a $P(1) = P(2) = 0 \iff (X-1)|P$ et $(X-2)|P \iff (X-1)(X-2)|P$ car $(X-1) \wedge (X-2) = 1$ (pour la partie $\Longrightarrow$)

2. (a) Puisque $A = X(X-i)(X+i)$, on a $A|P$ ssi $P(0) = P(i) = P(-i) = 0$ et $A|Q$ ssi $Q(0) = Q(i) = Q(-i) = 0$.
Or, $Q(0) = 1 \neq 0$ donc A n'est pas un diviseur de Q et il ne peut donc pas être un diviseur commun à P et Q.
   (b) On a $P(0) = 0$ et $P(i) = i(i^{12} + i^{10} - i^9 - i^7 + i^4 + 2i^2 + 1)$.
Or $i^{12} + i^{10} = i^{10}(i^2+1) = 0$, $i^9 + i^7 = i^7(i^2+1) = 0$ et $i^4 + 2i^2 + 1 = 0$ donc $P(i) = 0$.
Par ailleurs, P ayant tous ses coefficients réels, $P(-i) = P(\bar{i}) = \overline{P(i)} = 0$.
Ainsi, on a $A|P$ et donc $\mathsf{pgcd}(A, P) = A$.
Concernant Q, on a $Q(0) \neq 0$ et donc X ne divise pas Q. De plus $Q(i) = i^{10} - i^7 + i^2 + 1 = -1 + i - 1 + 1 \neq 0$ et donc $X - i$ ne divise pas Q et Q ayant tous ses coefficients réels, $Q(-i) = P(\bar{i}) = \overline{P(i)} \neq 0$ et donc $X + i$ ne divise pas Q. Ainsi, A et Q n'ont que 1 comme diviseur commun et donc $\mathsf{pgcd}(A, Q) = 1$.

3. Le discriminant de P vaut $\Delta = (3i-4)^2 + 4(7i-1) = 3 + 4i$. On cherche alors $\delta = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$ donc $a^2 - b^2 + 2iab = 3 + 4i$ ce qui conduit au système $\left\{\begin{array}{lcl} a^2 - b^2 & = & 3 \\ 2ab & = & 4 \end{array}\right.$.
On ajoute à ce système l'égalité des modules : $|\delta|^2 = |\Delta|$ donc $a^2 + b^2 = \sqrt{9+16} = 5$, et ainsi on a
$$\left\{\begin{array}{lcl} a^2 - b^2 & = & 3 \\ a^2 + b^2 & = & 5 \\ ab & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a^2 & = & 4 \\ b^2 & = & 1 \\ ab & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & \pm 2 \\ b & = & \pm 1 \\ ab & = & 2 > 0 \text{ donc } a \text{ et } b \text{ sont de même signe} \end{array}\right.$$
de solutions, $\delta^{\pm} = \pm(2+i)$. Les racines de P sont alors $\frac{4 - 3i + \delta^{\pm}}{2}$ à savoir $1 - 2i$ et $3 - i$.

Exercice 2.(fait en TD)

1. L'algorithme d'Euclide s'écrit ici
$(\star)$ $Q = XP - X^2 - 2$ donc $\mathsf{pgcd}(P, Q) = \mathsf{pgcd}(P, X^2 + 2)$
$(\star\star)$ $P = (X^2 + 2)X + 1$ donc $\mathsf{pgcd}(P, Q) = \mathsf{pgcd}(X^2 + 2, 1) = 1$

2. Par $(\star\star)$, $1 = P - (X^2+2)X$ et par $(\star)$ $1 = P + (Q - XP)X = (1 - X^2)P + XQ$ donc $U = 1 - X^2$ et $V = X$.

Exercice 3.

1.
   - ◇ Dans $\mathbb{R}[X]$: $deg(P_1) = 2$ donc P_1 est irréductible ssi sont discriminant est négatif ce qui est le cas ($\Delta = -4$)
   - ◇ Dans $\mathbb{C}[X]$: il est réductible, les seuls irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ étant les polynômes de degré 1.

2. Il est réductible dans $\mathbb{R}[X]$ puisque les seuls irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant négatif

3.
   - ◇ Dans $\mathbb{R}[X]$: $deg(P_3) = 2$ donc P_3 est irréductible ssi sont discriminant est négatif. Or $\Delta = 36$ et donc P_3 n'est pas irréductible.

- ◇ Dans $\mathbb{Q}[X]$: les racines de P_3 sont -1 et 5 donc P_3 est factorisable dans $\mathbb{Q}[X]$. Il n'est donc pas irréductible.

Exercice 4.

1. Les solutions de $X^4 = 1$ sont de module 1 et on les cherche donc sous la forme $z = e^{i\theta}$. On a $z^4 = 1 \iff 4\theta = 2k\pi \iff \theta = k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, modulo 2π, $\theta \in \{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\}$ et les solutions sont donc $\{1; i; -1; -i\}$.
   Remarque: on peut aussi, dans ce cas particulier, factoriser directement P puisque $X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$ ce qui répond en même temps à la question suivante.
2. (a) Dans $\mathbb{C}[X]$, on a $P = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$
   (b) Dans $\mathbb{R}[X]$, on a $P = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$
3. On a $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} X^k = \frac{X^4 - 1}{X - 1} = (X + 1)(X^2 + 1)$ par la question précédente.