

POLYNÔMES ET ALGÈBRE LINÉAIRE

Interrogation n°2

Durée 30mn

**Exercice 1.**

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Dire pour chaque affirmation, et en justifiant bien votre réponse, si elle est vraie ou fausse  
Soit  $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ 
  - (a) Si  $A$  divise  $BC$  alors  $A$  divise  $B$  et  $A$  divise  $C$ .
  - (b) Si  $A$  divise  $BC$  alors  $A$  divise  $B$  ou  $A$  divise  $C$ .
  - (c) Si  $A$  divise  $BC$  et  $\text{pgcd}(A, B) = 1$  alors  $A$  divise  $C$ .
2. Le polynôme  $P = X^4 + X^2$  est-il un diviseur de  $Q = X^6 + X^4 - X^3 - X$  ? Déterminer  $\text{pgcd}(P, Q)$ .
3. Les polynômes  $P = X^6 - 1$  et  $Q = X^{60} - 1$  sont-ils premiers entre eux ? Déterminer  $\text{pgcd}(P, Q)$
4. Le polynôme  $P = X^4 + 1$  est-il irréductible dans  $\mathbb{R}[X]$  ?

**Exercice 2.**

Donner la forme de la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle  $F$  dans les cas suivants :

1.  $F = \frac{X^6 + X - 1}{X^2(X^2 + 1)^2(X + 2)}$  dans  $\mathbb{R}(X)$  puis dans  $\mathbb{C}(X)$ .
2.  $F = \frac{X^4 + X^2 - 1}{X(X + 1)^2(X + 2)}$  dans  $\mathbb{R}(X)$ .