Université de Franche-Comté
Licence de Mathématiques, Semestre 3, 2019-20

POLYNÔMES ET ALGÈBRE LINÉAIRE
Interrogation n^{o}3
Durée 1h20

Exercice 1.
Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$, on considère les vecteurs $u_1 = e_2 + e_3$, $u_2 = e_2 - e_3$ et $u_3 = e_1 + e_2 - 2e_3$. On note $\mathscr{B}_0^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ la base duale associée à la base $\mathscr{B}_0$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathscr{B}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ où $u_1^* = \frac{1}{2}(e_1^* + e_2^* + e_3^*)$, $u_2^* = \frac{1}{2}(-3e_1^* + e_2^* - e_3^*)$ et $u_3^* = e_1^*$.
3. En déduire la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_0$.
4. Soit $F_1 = Vect(u_1, u_2)$ et $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\}$.
   (a) Justifier que F_1 et F_2 sont des hyperplans de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Rappeler la définition de $F_1^\perp$, orthogonal de F_1 dans $(\mathbb{R}^3)^*$.
   (c) Déterminer $F_1^\perp$ et $F_2^\perp$.
   (d) En déduire un système d'équations de F_1.
5. Soit $G = Vect(e_1^* - e_2^* + e_3^*, e_1^* + e_2^*)$ et G^0 l'orthogonal de G dans $\mathbb{R}^3$.
   (a) Rappeler la définition de G^0.
   (b) L'ensemble G^0 est-il un hyperplan de $\mathbb{R}^3$?
   (c) Déterminer G^0 et en donner un système d'équations.

Exercice 2.
Soit la base $\mathscr{B}_0 = (1, X, X^2)$ de $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B}_0^*$ la base duale associée. On considère les trois formes linéaires sur E définies pour tout $P \in E$ par $u_1^*(P) = P(-1)$, $u_2^*(P) = P(0)$, $u_3^*(P) = P(1)$.

1. Déterminer les coordonnées de u_1^*, u_2^* et u_3^* dans $\mathscr{B}_0^*$ et montrer que $\mathscr{B}_1^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ est une base de E^*.
2. Trouver la base $\mathscr{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ de E antéduale de la base $\mathscr{B}_1^*$.
3. Soit l'application $L : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)dt \end{array}$
   (a) Justifier que $L \in E^*$.
   (b) Exprimer L dans $\mathscr{B}_1^*$ et en déduire pour tout $P \in E$ une formule donnant la valeur de $\int_{-1}^{1} P(t)dt$ en fonction de $P(-1)$, $P(0)$ et $P(1)$.

Université de Franche-Comté
Licence de Mathématiques, Semestre 3, 2018-19

Polynômes et Algèbre Linéaire
Correction de l'interrogation n^{o}3

Exercice 1.

1. $\mathscr{B}$ est une famille à 3 éléments dans $\mathbb{R}^3$ et ce sera donc une base si elle est libre.
Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 &\iff ce_1 + (a+b+c)e_2 + (a-b-2c)e_3 = 0 \\ &\iff \begin{cases} c = 0 \\ a+b+c = 0 \\ a-b-2c = 0 \end{cases} \quad \text{(la famille } \mathscr{B}_0 \text{ étant libre)} \\ &\iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Par définition, $\mathscr{B}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ si pour tout $i, j = 1, 2, 3$ les relations $u_i^*(u_j) = \delta_{ij}$ sont vérifiées.
Pour $i = 1$, on a $u_1^*(u_1) = \frac{1}{2}(e_1^* + e_2^* + e_3^*)(e_2 + e_3) = 1$ par linéarité et puisque $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.
De même, $u_1^*(u_2) = \frac{1}{2}(e_1^* + e_2^* + e_3^*)(e_2 - e_3) = 0$ et $u_1^*(u_3) = \frac{1}{2}(e_1^* + e_2^* + e_3^*)(e_1 + e_2 - 2e_3) = 0$.
On vérifie de même que $u_2^*(u_j) = \delta_{2j}$ et $u_3^*(u_j) = \delta_{3j}$ et donc $\mathscr{B}^* = \Big(\frac{1}{2}(e_1^*+e_2^*+e_3^*), \frac{1}{2}(-3e_1^*+e_2^*-e_3^*), e_1^*\Big)$.

3. On peut procéder de deux manières :

   - soit en utilisant la question précédente : on a $\mathscr{B}^* = \mathscr{B}_0^* P$ où $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\mathscr{B}_0^* = \mathscr{B}^* \, {}^tP$: la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_0$ est donc la matrice ${}^tP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   - soit en utilisant la formule $u = \sum_{k=1}^{3} u_k^*(x)u_k$ qui donne
   pour $x = e_1 : e_1 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{3}{2}u_2 + u_1$
   pour $x = e_2 : e_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2$
   pour $x = e_3 : e_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2$

   et donc (évidement) la même matrice.

4. (a) Les vecteurs u_1 et u_2 n'étant pas colinéaires, on a $dim(F_1) = 2 = dim(\mathbb{R}^3) - 1$ et donc F_1 est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
Par ailleurs, $F_2 = \mathrm{Ker}(\phi)$ où $\phi = e_1^* + e_2^* + e_3^* \in (\mathbb{R}^3)^*$ et donc F_2 est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
   (b) $F_1^\perp = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*,\ \forall u \in F_1,\ \varphi(u) = 0\}$.
   (c) Puisque $F_1 = Vect(u_1, u_2)$, on a $F_1^\perp = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*,\ \varphi(u_1) = \varphi(u_2) = 0\}$.
Ainsi, $\varphi = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i^* \in F_1^\perp$ où $a_i \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\varphi(u_1) = \varphi(e_2 + e_3) = a_2 + a_3 = 0$ et $\varphi(u_2) = \varphi(e_2 - e_3) = a_2 - a_3 = 0$ donc si et seulement si $a_2 = a_3 = 0$ et $a_1 \in \mathbb{R}$ arbitraire. Ainsi $\varphi = a_1 e_1^*$ avec $a_1 \in \mathbb{R}$ arbitraire et donc $F_1^\perp = Vect(e_1^*)$.
Concernant $F_2^\perp$, puisque $F_2 = \mathrm{Ker}(e_1^* + e_2^* + e_3^*)$, on a directement $F_2^\perp = Vect(e_1^* + e_2^* + e_3^*)$.
   (d) Puisque $F_1^\perp = Vect(e_1^*)$, un système d'équation de F_1 est $e_1^*(x, y, z) = 0$ à savoir $x = 0$.

5. (a) $G^0 = \{u \in \mathbb{R}^3,\ \forall \varphi \in G,\ \varphi(u) = 0\}$.

(b) L'ensemble G est engendré par deux vecteurs non colinéaires et donc $dim(G) = 2$.
Or $dim(G) + dim(G^0) = dim(\mathbb{R}^3)$ et donc $dim(G^0) = 1$: G^0 n'est donc pas un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

(c) Puisque $G = Vect\Big(e_1^* - e_2^* + e_3^*, e_1^* + e_2^*\Big)$, on a $G^0 = \{u \in \mathbb{R}^3,\ (e_1^* - e_2^* + e_3^*)(u) = (e_1^* + e_2^*)(u) = 0\}$ c'est-à-dire $G^0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0 \text{ et } x + y = 0\}$.
Un système d'équations associé à G^0 est donc $\left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right.$.

Exercice 2.

1. Par la formule $u_i^* = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} u_i^*(X^k)(X^k)^*$, les coordonnées de u_i^* dans $\mathscr{B}_0^*$ sont les scalaires $u_i^*(1)$, $u_i^*(X)$, $u_i^*(X^2)$. Ainsi, $u_1^* = (1, -1, 1)$, $u_2^* = (1, 0, 0)$ et $u_3^* = (1, 1, 1)$.
On a alors $\mathscr{B}_1^* = \mathscr{B}_0^* M$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{B}_1^*$ sera une base si et seulement si M admet pour réduite de Gauss la matrice identité. La procédure d'échelonnement-réduction donne alors

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Ainsi, $\mathscr{B}_1^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ est une base de E^* et, ce qui servira dans la question suivante,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Avec les notations de la question précédente, puisque $\mathscr{B}_1^* = \mathscr{B}_0^* M$, on a $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_0\ {}^tM^{-1}$ ce qui donne $u_1 = \frac{1}{2}(-X + X^2)$, $u_2 = 1 - X^2$ et $u_3 = \frac{1}{2}(X + X^2)$.

3. (a) Pour tout $P, Q \in E$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la linéarité de l'intégrale donne $L(P + \alpha Q) = L(P) + \alpha L(Q)$ donc L est linéaire et $L(P) \in \mathbb{R}$ donc $L \in E^*$.

(b) On a $L = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} L(u_k) u_k^*$ avec $L(u_1) = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} (-t + t^2)dt = \frac{1}{3}$, $L(u_2) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - t^2)dt = \frac{4}{3}$ et $L(u_3) = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} (t + t^2)dt = \frac{1}{3}$ et on obtient donc que $L = \frac{1}{3}u_1^* + \frac{4}{3}u_2^* + \frac{1}{3}u_3^*$ à savoir que pour tout $P \in E$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)dt = \frac{1}{3}u_1^*(P) + \frac{4}{3}u_2^*(P) + \frac{1}{3}u_3^*(P) = \frac{1}{3}P(-1) + \frac{4}{3}P(0) + \frac{1}{3}P(1)$.