Problèmes elliptiques non linéaires

Cours de Louis Jeanjean *
Equipe de Mathematiques (UMR CNRS 6623)
Université de Franche-Comté,
email : jeanjean@math.univ-fcomte.fr

1 Introduction

L'essentiel de ce cours sera consacré à la présentation de méthodes variationnelles et à leur application pour résoudre des équations semi linéaires de la forme

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \;\; u \in H^1(\mathbf{R}^N) \tag{1}$$

où $V \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ et $f \in C(\mathbf{R})$ est une nonlinéarité surlinéaire à l'origine, i.e; telle que $f(s)s^{-1} \to 0$, si $s \to 0$. Remarquons que $u = 0$ est trivialement solution de (1). Nous chercherons donc des solutions non nulles.

Utiliser une méthode variationnelle pour résoudre une équation signifie que l'on va chercher une solution sous forme d'un point critique d'une fonctionnelle associée. Ici, la fonctionnelle naturelle associée à (1) est $I : H^1(\mathbf{R}^N) \to \mathbf{R}$ avec

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx - \int_{\mathbf{R}^N} F(u)dx$$

où $F(s) = \int_0^s f(t)dt$. On peut montrer que I est de classe C^1 et que si $u \in H^1(\mathbf{R}^N)$ est tel que $I'(u) = 0$ alors u satisfait (1) (voir [R] pour ce type de résultat). On s'intéressera surtout à des fonctionnelles ayant une géométrie de col.

---

*Cours rédigé à l'occasion de l'école d'été " Dynamique des équations aux dérivées partielles non linéaires" organisée du 20 juin au 8 juillet 2005 à l'Institut Fourier.

Définition 1.1 *Soit $(X, ||\cdot||)$ un espace de Banach réflexif et $I \in C^1(X, \mathbf{R})$. On dit que I a une géométrie de col ssi il existe deux points (v_1, v_2) dans X tels que, si*

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X), \gamma(0) = v_1, \gamma(1) = v_2\}$$

on a

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) > \max\{I(v_1), I(v_2)\}.$$

Pour une telle fonctionnelle il est intuitif de chercher un point critique au niveau c. Comme nous le verrons, un tel point critique peut ne pas exister. Cependant comme conséquence de la géométrie de col on obtient, par le principe d'Ekeland, qu'il existe une suite de Palais-Smale au niveau c pour la fonctionnelle I (voir [E] pour un tel résultat).

Définition 1.2 *Une suite $\{u_n\} \subset X$ telle que $I(u_n) \to c$ et $I'(u_n) \to 0$ dans le dual de X est appelée une suite de Palais-Smale au niveau c (une suite PS au niveau c pour abréger).*

Soit (u_n) une suite PS au niveau c telle que $u_n \to u$ pour un $u \in X$ (éventuellement en passant à une sous-suite). Alors puisque $I \in C^1(X, \mathbf{R})$ il vient

$$I(u_n) \to c \Longrightarrow I(u) = c \ \text{ et } \ I'(u_n) \to 0 \Longrightarrow I'(u) = 0$$

et donc u est un point critique pour I au niveau c.

Pour montrer que $u_n \to u$ il faut surmonter deux difficultés.

1) Montrer que (u_n) est bornée (c'est un problème lié à la géométrie de la fonctionnelle). On peut alors supposer que $u_n \rightharpoonup u$.

2) Montrer que $u_n \rightharpoonup u \Longrightarrow u_n \to u$ (c'est un problème lié à la compacité).

Le Chapitre **2** sera consacré à la première difficulté et le Chapitre **3** à la seconde.

Remarque 1.1 *Sous l'hypothèse que I a une géométrie de col on peut montrer l'existence d'une suite de Cerami au niveau c, i.e. telle que*

$$I(u_n) \to c \quad \text{et} \quad (1 + ||u_n||) I'(u_n) \to 0$$

(voir [E] pour un tel résultat).

Remarque 1.2 *Lorsque* $(u_n) \subset X$ *est une suite PS et que* $u_n \rightharpoonup u$ *il est souvent facile de montrer que* $I'(u) = 0$. *Si* $u \neq 0$ *on obtient alors un point critique non trivial. C'est souvent plus simple que de montrer que* $u_n \to u$.

2 Suites de Palais-Smale bornées

On va présenter tout d'abord un résultat de type "générique". Dans ce qui suit on abrégera par BPS une suite de Palais-Smale bornée.

Théorème 2.1 *Soit* $(X, ||\cdot||)$ *un espace de Banach,* $J \subset \mathbf{R}^+$ *un intervalle et* $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ *une famille de fonctionnelles* C^1 *sur* X *de la forme*

$$I_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u), \quad \textit{pour tout } \lambda \in J$$

où $B(u) \geq 0, \forall u \in X$ *et* $B(u) \to +\infty$ *si* $\|u\| \to \infty$ *(ou alternativement* $A(u) \to +\infty$ *si* $\|u\| \to \infty$*). On suppose qu'il existe deux points* v_1, v_2 *de* X *tels qu'en posant*

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X), \gamma(0) = v_1, \gamma(1) = v_2\}$$

on a, $\forall \lambda \in J$

$$c(\lambda) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\}.$$

Alors, pour presque tout $\lambda \in J$*, il existe une suite* $\{v_n\} \subset X$ *telle que*

(i) $\{v_n\}$ *est bornée, (ii)* $I_\lambda(v_n) \to c(\lambda)$*, (iii)* $I'_\lambda(v_n) \to 0$ *dans le dual de* X.

Notons que sous les hypothèses du Théorème 2.1, il peut ne pas exister de suite BPS au niveau $c(\lambda)$ pour certaines valeurs de $\lambda \in J$ (voir [J1] pour un exemple dû à Brezis).

Idées de la preuve (voir [J1] pour le détail) : On commence par observer que la fonction $\lambda \to c(\lambda)$ est monotone (ici décroissante, puisque $B(u) \geq 0, \forall u \in X$). Donc $c(\lambda)$ est dérivable presque partout et pour prouver le Théorème 2.1 il suffit de montrer que si $c'(\lambda)$ existe, I_λ possède une suite BPS au niveau $c(\lambda)$. Fixons un $\lambda_0 \in J$ où $c'(\lambda_0)$ existe. Soit $\{\lambda_n\} \subset J$

une suite strictement croissante telle que $\lambda_n \to \lambda_0$ et $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ une suite de chemins satisfaisant

$$\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) \leq c(\lambda_n) + (\lambda_0 - \lambda_n). \tag{2}$$

Une telle suite $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ existe puisque Γ est indépendant de λ. Nous prouvons qu'il existe $K = K(\lambda_0) > 0$ tel que

(i) $\|\gamma_n(t)\| \leq K$ si $I_{\lambda_0}(\gamma_n(t)) \geq c(\lambda_0) - (\lambda_0 - \lambda_n)$.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\max\limits_{t\in[0,1]} I_{\lambda_0}(\gamma_n(t)) \leq c(\lambda_0) + \varepsilon$ pour $n \in N$ assez grand.

Par (ii), $\max_{t\in[0,1]} I_{\lambda_0}(\gamma_n(t)) \to c(\lambda_0)$ et par (i) il existe une boule, centrée à l'origine et dont le rayon $K > 0$ est indépendant de $n \in \mathbf{N}$, qui contient la partie supérieure (par rapport à I_{λ_0}) de chaque chemin γ_n. Par un argument de déformation, on en déduit que pour tout $a > 0$

$$\inf\{\|I'_{\lambda_0}(u)\| \ ; \ u \in X, \ \|u\| \leq K + 1 \text{ et } |I_{\lambda_0}(u) - c(\lambda_0)| \leq a\} = 0.$$

Il suit que I_{λ_0} possède une suite PS au niveau $c(\lambda_0)$, bornée, car contenue dans la boule de rayon $K + 1$ centrée à l'origine.

Remarque 2.1 *Ce type de résultat généralise des travaux précédents de M. Struwe (voir 9.5, ch II de [Str]). Il peut être étendu à des familles de fonctionnelles ayant d'autres type de géométrie (voir par exemple [SZ] pour une version dans un cadre de linking).*

Remarque 2.2 *On peut en fait montrer que l'hypothèse $B(u) \geq 0$, $\forall u \in X$ qui donne la monotonie sur $c(\lambda)$ n'est pas nécessaire (voir [JT]). Cette généralisation repose sur l'observation que la preuve du Théorème 2.1 peut être adaptée, si on remplace l'existence de $c'(\lambda_0)$ par la condition qu'il existe une suite strictement croissante $\{\lambda_n\} \subset J$ telle que*

$$\lambda_n \uparrow \lambda_0 \ \textit{et} \ \inf_{n\in\mathbf{N}} \frac{c(\lambda_n) - c(\lambda_0)}{\lambda_n - \lambda_0} > -\infty.$$

Il découle d'un résultat classique dû à Denjoy [S, Th. (4.4), p. 270], que l'ensemble des λ_0 pour lesquels cette condition est fausse est de mesure nulle. Dans [JT] nous étendons aussi le Théorème 2.1 à une famille $(I_\lambda)_{\lambda\in J}$ plus générale.

On s'intéresse souvent à l'existence d'une suite BPS au niveau du col pour une fonctionnelle donnée, à savoir pour un $\lambda \in J$ donné. Le Théorème 2.1, tout comme la version améliorée de [JT], est un outil puissant pour établir l'existence d'une telle suite. C'est en particulier vrai si le problème possède des propriétés de compacité :

Corollaire 2.1 *Soient $(X, ||\cdot||)$ un espace de Banach et $I \in C^1(X, \mathbf{R})$ une fonctionnelle de la forme $I(u) = A(u) - B(u)$ où B et B' sont bornés. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $J = [1-\varepsilon, 1]$, la famille $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ définie par*

$$I_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u)$$

satisfait les hypothèses du Théorème 2.1 et que pour tout $\lambda \in J$ toute suite BPS pour I_λ au niveau $c(\lambda)$ admet une sous-suite convergente. Alors il existe $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset\ [1-\varepsilon, 1] \times X$ avec $\lambda_n \to 1$ et

$$I_{\lambda_n}(u_n) = c(\lambda_n) \text{ et } I'_{\lambda_n}(u_n) = 0$$

telle que, si $\{u_n\} \subset X$ est bornée, on a,

$$I(u_n) = I_{\lambda_n}(u_n) + (\lambda_n - 1)B(u_n) \to \lim_{n\to\infty} c(\lambda_n) = c(1)$$

$$I'(u_n) = I'_{\lambda_n}(u_n) + (\lambda_n - 1)B'(u_n) \to 0 \text{ dans le dual de } X.$$

Notons que la continuité à gauche de la fonction $\lambda \to c(\lambda)$ est une conséquence de la semi-continuité supérieure de $c(\lambda)$ vraie sous des hypothèses générales et de la monotonie (voir [J1]).

Le Corollaire 2.1 dit que, si $\{u_n\}$ est bornée, alors c'est une suite BPS pour I au niveau du col. On peut se poser la question de l'intérêt de ce résultat puisque l'existence d'une suite PS pour I au niveau du col était déjà connue (par le principe d'Ekeland) et que le seul problème restant était, comme maintenant, de montrer qu'elle est bornée. Le progrès accompli est le suivant : pour montrer que la suite est bornée, on utilise le fait qu'il s'agit d'une suite de vrais points critiques pour des fonctionnelles proches de I. Le fait que $\{u_n\}$ est une suite de vrais points critiques (plutôt qu'une suite de points presque critiques de I comme dans le cas d'une suite PS standard) fournit souvent des informations supplémentaires qui aident à montrer que $\{u_n\}$ est bornée. Supposons que I soit définie sur un espace de Sobolev et que ses points critiques (comme ceux de I_{λ_n}) correspondent à des solutions d'une EDP. Alors ils possèdent une plus forte régularité que les éléments standards de l'espace ambiant. Aussi une utilisation d'un principe du maximum peut garantir le signe de u_n, $\forall n \in \mathbf{N}$ et il existe parfois des contraintes que u_n doit satisfaire, par exemple une identité de type Pohozaev (voir plus loin dans le cours). Plus généralement, pour $\lambda \in \mathbf{R}$, posons

$$K_\lambda := \{u \in X; I_\lambda(u) = c(\lambda) \text{ et } I'_\lambda(u) = 0\}.$$

Si $\cup_{\lambda\in[1-\varepsilon,1]} K_\lambda$ est bornée pour $\varepsilon > 0$ et si pour tout $\lambda \in [1-\varepsilon, 1]$ toute suite BPS pour I_λ au niveau $c(\lambda)$ admet une sous-suite convergente, I possède un point critique.

Nous allons maintenant appliquer nos résultats abstraits pour prouver l'existence d'une solution non triviale de

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \qquad u \in H^1(\mathbf{R}^N), \tag{3}$$

où l'on suppose sur $V \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$

(V1) Il existe $\alpha > 0$ tel que $V(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$,

(V2) $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = V(\infty) \in (0, \infty)$

(V3) $V(x) \leq V(\infty)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$.

et sur le terme non linéaire $f \in C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$

(f1) $f(s)s^{-1} \to 0$ si $s \to 0+$.

(f2) Il existe $a \in]0, \infty[$ tel que $f(s)s^{-1} \to a$ si $s \to +\infty$ et

$$a > \inf \sigma(-\Delta + V(x)),$$

où $\sigma(-\Delta + V(x))$ désigne le spectre de l'opérateur auto adjoint $-\Delta + V(x) : H^2(\mathbf{R}^N) \to L^2(\mathbf{R}^N)$ i.e.

$$\inf \sigma(-\Delta + V(x)) = \inf_{u\in H^1(\mathbf{R}^N)} \frac{\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx}{\int_{\mathbf{R}^N} u^2 dx.}$$

(f3) Soit $G : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par $G(s) = \frac{1}{2} f(s)s - F(s)$,

(i) $G(s) \geq 0$ pour tout $s \geq 0$.

(ii) Il existe $\delta > 0$ such that

$$2F(s)s^{-2} \geq V(\infty) - \delta \Longrightarrow G(s) \geq \delta.$$

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses (V1)-(V3) et (f1)-(f3), (3) possède une solution non triviale positive.*

Remarque 2.3 *(f3) est satisfaite si $s \to f(s)s^{-1}$ est non décroissante.*

Remarque 2.4 *En prolongeant f par $f(s) = 0$ si $s \leq 0$ on s'assure que toute solution de (3) est positive. En effet soit $u = u^+ - u^-$ une solution de (3). On sait que $u^+, u^- \in H^1(\mathbf{R}^N)$ (voir [W2, Th. (4.47), p. 159] par exemple). Alors en multipliant (3) par u^- et en intégrant il vient*

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathbf{R}^N} f(u^+ - u^-)u^- dx &= \int_{\mathbf{R}^N} -\Delta(u^+ - u^-)u^- dx - \int_{\mathbf{R}^N} V(x)(u^-)^2 dx \\ &= -\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u^-|^2 dx - \int_{\mathbf{R}^N} V(x)(u^-)^2 dx. \end{aligned}$$

D'où $u^- \equiv 0$ et $u = u^+ \geq 0$.

Une solution de (3) correspond à un point critique de la fonctionnelle $I : H^1(\mathbf{R}^N) \to \mathbf{R}$ définie par

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\, dx - \int_{\mathbf{R}^N} F(u)\, dx.$$

Nous allons travailler sur $H^1(\mathbf{R}^N)$ avec la norme

$$||u||^2 = \int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx$$

qui sous notre hypothèse (V1), est équivalente à la norme standard sur $H^1(\mathbf{R}^N)$. On utilisera aussi la notation :

$$||u||_p = \left(\int_{\mathbf{R}^N} |u|^p\, dx\right)^{1/p} \quad \text{pour tout } p \in (1, \infty).$$

Conformément à la démarche générale on va considérer la famille d'équations

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda f(u), \text{ pour } \lambda \in [\frac{1}{2}, 1].$$

La famille de fonctionnelles associée est

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,dx - \lambda\int_{\mathbf{R}^N} F(u)\,dx.$$

Lemme 2.1 *Sous les hypothèses (V1),(f1),(f2) la famille* I_λ *satisfait la géométrie du Théorème 2.1. En particulier* $I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + o(\|u\|^2)$ *lorsque* $u \to 0$ *et il existe* $v \in H^1(\mathbf{R}^N), v \neq 0$ *tel que* $I_\lambda(v) \leq 0, \forall \lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Idée de la preuve (voir [JT1] pour le détail) :

1) Les hypothèses (f1) et (f2) nous disent que $\forall \varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que

$$F(s) \leq \varepsilon s^2 + C_\varepsilon s^p \text{ pour un } p \in]2, \frac{2N}{N-2}[.$$

Par suite, par les inclusions de Sobolev, il vient que

$$\int_{\mathbf{R}^N} F(u)dx \leq \varepsilon||u||_2^2 + \tilde{C}_\varepsilon||u||^p$$

pour un $\tilde{C}_\varepsilon > 0$ et, comme $p > 2$, le terme $\int_{\mathbf{R}^N} F(u)dx$ devient négligeable devant $||u||^2$ lorsque $||u||$ est petit.

2) Le fait que $\exists v \in H^1(\mathbf{R}^N)$, $v \neq 0$ tel que $I_\lambda(v) \leq 0$ est une conséquence de (f2) (utiliser des fonctions test). ♠

Du Théorème 2.1 on déduit que $\exists(\lambda_n) \subset [\frac{1}{2}, 1]$ avec $\lambda_n \to 1$ tel que I_{λ_n} possède une suite de Palais-Smale bornée au niveau $c(\lambda_n)$.

Lemme 2.2 *Sous les hypothèses (V1)-(V3) et (f1)-(f3), pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *il existe* $u_n \in H^1(\mathbf{R}^N)$ *tel que* $(\lambda_n, u_n) \in [\frac{1}{2}, 1] \times H^1(\mathbf{R}^N)$ *vérifie* $I_{\lambda_n}(u_n) = c(\lambda_n)$ *et* $I'(\lambda_n)u_n = 0$. *De plus on a que* $u_n \geq 0$ *sur* $\mathbf{R}^N$.

Preuve: Nous verrons comment prouver ce résultat dans le Chapitre **3**.

Remarque 2.5 *Avec la même preuve que dans le Lemme 2.2 on montre que si* $(v_n) \subset H^1(\mathbf{R}^N)$ *est une suite de Palais-Smale bornée au niveau* c *pour la fonctionnelle* I *alors* $v_n \to v$ *avec* v *satisfaisant* $I(v) = c$ *et* $I'(v) = 0$.

Comme conséquence de la Remarque 2.5 et du Corollaire 2.1 on voit qu'il suffit de montrer le résultat suivant pour prouver le Théorème 2.2.

Proposition 2.1 *On suppose (V1)-(V3),(f1)-(f3). Soit* $(u_n) \in H^1(\mathbf{R}^N)$ *la suite obtenue au Lemme 2.2, i.e. telle que*

$$-\Delta u_n + V(x)u_n = \lambda_n f(u_n)$$

avec $I_{\lambda_n}(u_n) = c(\lambda_n)$ *et* $\lambda_n \to 1$. *Alors* $(u_n) \subset H^1(\mathbf{R}^N)$ *est bornée.*

Preuve: Supposons par contradiction que $||u_n|| \to \infty$. Alors si on pose $w_n = u_n \|u_n\|^{-1}$ il existe, une sous-suite toujours notée $\{w_n\}$, convergeant faiblement vers un $w \in H^1(\mathbf{R}^N)$ et qui satisfait l'alternative :

(1) (non-vanishing) $\exists \alpha > 0$, $R < \infty$ et $(y_n) \subset \mathbf{R}^N$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{y_n + B_R} w_n^2 \, dx \geq \alpha > 0,$$

(2) (vanishing) $\forall R < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y \in \mathbf{R}^N} \int_{y + B_R} w_n^2 \, dx = 0.$$

Notons que cette terminologie a été introduite par P-L. Lions dans ses travaux sur la compacité par concentration [L1]. Pour prouver la Proposition il suffit de montrer que ni (1) ni (2) ne sont possibles.

Lemme 2.3 *Sous les hypothèses (V1), (f1)-(f2) si* (w_n) *est "non vanishing" et que* $(y_n) \subset \mathbf{R}^N$ *est bornée alors on obtient une contradiction.*

Idée de la preuve (voir [JT1] pour le détail) : Puisque

$$-\Delta u_n + V(x)u_n = \lambda_n f(u_n)$$

il vient en divisant par $||u_n||$

$$-\Delta w_n + V(x)w_n = \lambda_n \frac{f(u_n)}{||u_n||} = \lambda_n \frac{f(u_n)}{u_n} w_n. \tag{4}$$

Comme $(y_n) \subset \mathbf{R}^N$ reste bornée $w_n \to w \neq 0$ dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^N)$ et sur l'ensemble $\Omega := \{x \in R^N; w(x) > 0\}$ qui est de mesure non nulle on a

$$\frac{f(u_n)}{u_n} \to a.$$

Par suite en passant à la limite dans (4) on obtient

$$-\Delta w + V(x)w = aw.$$

A savoir, $w \neq 0, w \geq 0$ est un vecteur propre positif associé à la valeur propre a. Ceci est une contradiction car comme $a > inf\sigma(-\Delta + V(x))$ l'opérateur $-\Delta + V(x)$ ne peut avoir de vecteur propre associé à la valeur propre a. ♠

Lemme 2.4 *Sous les hypothèses (V1)-(V2)et (f1)-(f2) si* (w_n) *est "non vanishing" et que* $|y_n| \to \infty$ *alors on a une contradiction.*

Idée de la preuve (voir [JT1] pour le détail) : On pose $\tilde{w_n}(\cdot) = w_n(\cdot - y_n)$. Alors $\tilde{w_n} \rightharpoonup \tilde{w} \neq 0$ et $\tilde{w} \geq 0$ satisfait

$$\Delta\tilde{w} + V(\infty)\tilde{w} = a\tilde{w}.$$

C'est une contradiction car $-\Delta u + V(\infty)$ n'a pas de valeur propre (le spectre est purement continu). ♠

Pour prouver la Proposition 2.1 il reste a montrer que le "vanishing" de $(w_n) \subset H^1(\mathbf{R}^N)$ n'est pas possible. Comme la preuve est assez technique nous ne l'a donnons pas ici mais renvoyons à [J1, JT1]. Notons cependant que l'hypothèse (f3) n'est utilisée qu'ici. Cette hypothèse est technique et à ce jour c'est un problème ouvert de chercher les hypothèses les plus générales sur f qui garantissent l'existence d'une suite PS bornée.

Comme deuxième application de la théorie abstraite et comme prolongement de celle ci nous allons traiter un problème de bifurcation depuis le spectre essentiel. Dans [J2] on considère la famille d'équations

$$-\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(x, u(x)),\ \lambda > 0,\ x \in \mathbf{R}^N, \tag{5}$$

où l'on suppose qu'il existe $\delta > 0$ est tel que

(H1) $f : \mathbf{R}^N \times [-\delta, \delta] \to \mathbf{R}$ est Carathéodory.

(H2) $\lim_{|x|\to\infty} f(x,s) = 0$ uniformément pour $s \in [-\delta, \delta]$.

(H3) Il existe $K > 0$ tel que $\limsup_{s\to 0} |f(x,s)s^{-1}| \leq K$ uniformément en $x \in \mathbf{R}^N$.

(H4) $\lim_{s\to 0} F(x,s)s^{-2} = 0$ uniformément en $x \in \mathbf{R}^N$ avec $F(x,s) := \int_0^s f(x,t)dt$.

(H5) Il existe $A > 0$, $d \in]0,2[$ et $\alpha \in]0, \frac{2(2-d)}{N}[$ tel que

$$F(x,s) \geq A(1+|x|)^{-d}|s|^{2+\alpha} \text{ pour tout } s \in [-\delta, \delta].$$

Définition 2.1 *On dit que $\lambda = 0$ est un point de bifurcation s'il existe une suite $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbf{R}^+ \times H^1(\mathbf{R}^N)\backslash\{0\}$ de solutions de (5) avec $\lambda_n \to 0$ et $||u_n||_{H^1(\mathbf{R}^N)} \to 0$.*

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 2.3 *Si (H1)-(H5) sont satisfaites, alors $\lambda = 0$ est un point de bifurcation pour (5).*

Idée de la preuve (voir [J2] pour le détail) : On commence par changer f en $\tilde{f}$ à l'extérieur de $[-\delta, \delta]$ en choisissant $\tilde{f}$ de sorte que $\forall u \in H$,

$$\int_{\mathbf{R}^N} \tilde{F}(x,u)\,dx \leq \frac{K}{2}||u||_2^2 \quad \text{où} \quad \tilde{F}(x,s) := \int_0^s \tilde{f}(x,t)\,dt. \tag{6}$$

On introduit ensuite, pour $\lambda > 0$, la famille de fonctionnelles $I_\lambda : H \to \mathbf{R}$, définies par

$$I_\lambda(u) = ||\nabla u||_2^2 + \lambda\, ||u||_2^2 - 2\int_{\mathbf{R}^N} \tilde{F}(x,u)\,dx$$

associée à la version modifiée de (5). On montre, en utilisant (H5), qu'il existe $\lambda_0 > 0$, tel que pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$, les ensemble suivants sont non vides

$$\Gamma_\lambda := \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbf{R}^N)), \gamma(0) = 0 \text{ et } I_\lambda(\gamma(1)) < 0\}$$

et

$$c(\lambda) := \inf_{\gamma\in\Gamma_\lambda} \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > I_\lambda(0) = 0.$$

Donc I_λ a, pour $\lambda \in]0, \lambda_0]$, une *géométrie de col.* De plus la fonction $\lambda \to c(\lambda)$ est croissante et nous sommes donc dans la situation du Théorème 2.1. On en déduit que, lorsque $c'(\lambda)$ existe, I_λ possède une suite BPS, $\{u_m\} \subset H^1(\mathbf{R}^N)$ au niveau $c(\lambda)$. Par la condition de compacité (H2), cela conduit à l'existence d'un point critique non trivial de I_λ. Ceci n'est cependant pas suffisant pour obtenir le Théorème 2.3 ; on a besoin d'estimations précises sur la taille de ces points critiques. On les obtient en raffinant la preuve de l'existence de $\{u_m\} \subset H^1(\mathbf{R}^N)$. L'argument est en gros le suivant. Tout d'abord on montre que $||u_m||_2$ est controlée par $c(\lambda)$ et $c'(\lambda)$. Nous entendons par là que $||u_m||_2$ tend vers zéro, uniformément en $m \in \mathbf{N}$, si $c(\lambda) \to 0$ et $c'(\lambda) \to 0$. Par suite, comme

$$||\nabla u_m||_2^2 + \lambda ||u_m||_2^2 - 2 \int_{\mathbf{R}^N} \tilde{F}(x, u_m)\, dx \to c(\lambda)$$

il suit de (6) que $||\nabla u_m||_2$ est aussi controlée par $c(\lambda)$ et $c'(\lambda)$. Donc $\{u_m\}$ est contenue dans une boule centrée à l'origine dont le rayon tend vers zéro lorsque $c(\lambda) \to 0$ et $c'(\lambda) \to 0$. Maintenant on montre grâce à des fonctions tests que $c(\lambda)\lambda^{-1} \to 0$ lorsque $\lambda \to 0$, ce qui implique l'existence d'une suite strictement décroissante $\lambda_n \to 0$ telle que $c(\lambda_n) \to 0$ et $c'(\lambda_n) \to 0$. En appelant $\{u_n\}$ la suite des solutions correspondant à $\{\lambda_n\}$, on déduit immédiatement que $||u_n||_{H^1(\mathbf{R}^N)} \to 0$ et cela prouve la bifurcation pour le problème modifié. On montre alors que la bifurcation advient en norme L^∞ et donc pour (5). ♠

Remarque 2.6 *Pour des résultats antérieurs sur l'existence de points de bifurcation nous renvoyons à [Stu1] (voir aussi [Stu2] pour une présentation générale du sujet). Notons que l'approche à l'existence de points de bifurcation développée dans [J2] a été généralisée dans [GJ].*

3 Pertes de compacité

On considère dans ce chapitre de nouveau l'équation

$$-\Delta u + V(x)u = f(u), \;\; u \in H^1(\mathbf{R}^N) \tag{7}$$

sous les hypothèses (V1) et (f1) et en supposant que $\int_{\mathbf{R}^N} F(u)dx$ existe pour $u \in H^1(\mathbf{R}^N)$.

On suppose aussi que la fonctionnelle I est de classe C^1, qu'elle possède une géométrie de col et qu'il existe une suite PS bornée $(u_n) \subset H^1(\mathbf{R}^N)$ au niveau du col c. On peut alors supposer que $u_n \rightharpoonup u$. En général cependant on n'a pas que $u_n \to u$. Pour voir cela supposons que $V(x) = V$, $f(u) = |u|^{p-1}u$ avec $p = \frac{N+2}{N-2}$ et que $N \geq 3$. Il est standard de montrer que nos hypothèses sont alors satisfaites.

On rappelle (voir [BL]) que toute solution $u \in H^1(\mathbf{R}^N)$ d'une équation de la forme

$$-\Delta u + Vu = f(u)$$

satisfait l'identité de Pohozaev

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbf{R}^N} (-Vu^2 + F(u))dx. \tag{8}$$

Remarque 3.1 *Formellement (8) s'obtient en exprimant que si u est une solution de (7) alors la dérivée de la fonction $s \to I(u(\frac{x}{s}))$ s'annule pour $s = 1$.*

Lorsque $f(u) = |u|^{p-1}u$ il vient alors que

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \frac{2N}{N-2} \int_{\mathbf{R}^N} (-Vu^2 + \frac{1}{p+1}|u|^{p+1})dx.$$

D'autre part comme $I'(u)u = 0$ on a

$$\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 dx = \int_{\mathbf{R}^N} (-Vu^2 + |u|^{p+1})dx.$$

Par suite on obtient

$$\left(\frac{2N}{N-2}\frac{1}{p+1} - 1\right) \int_{\mathbf{R}^N} |u|^{p+1} dx = \left(\frac{VN}{N-2} - \frac{V}{2}\right) \int_{\mathbf{R}^N} |u|^2 dx.$$

Puisque $N \geq 3$, $\dfrac{VN}{N-2} - \dfrac{V}{2} > 0$ et d'autre part $\dfrac{2N}{N-2}\dfrac{1}{p+1} - 1 = 0$. Par suite on a $u \equiv 0$ et que (u_n) ne converge pas vers u.

Remarque 3.2 *Il existe une identité de Pohozaev lorsque l'équation est posée sur un domaine (borné) avec des conditions de Dirichlet sur le bord (voir par exemple [Str]). L'identité implique alors des termes de bord. Il existe aussi des versions lorsque l'équation n'est pas autonome.*

Dans la suite du Chapitre on supposera que la non linéarité f est sous critique dans le sens où

(f2)' Il existe $p \in]1, \frac{N+2}{N-2}[$ si $N \geq 3$ et $p > 1$ si $N = 1, 2$ tel que $\lim_{s\to\infty} f(s)s^{-p} < \infty$.

Remarque 3.3 *Notons que même dans le cas sous critique (7) peut ne pas avoir de solution. En effet dans [EL], Esteban et Lions ont montré que si $V(x)$ est monotone (non constant) dans une direction alors l'équation (7), sous critique, n'a que la solution triviale.*

Un premier outil pour étudier la convergence de u_n est le résultat suivant (voir [JT5] pour une preuve) qui généralise des travaux antérieurs de P-L. Lions (voir [L2]) et s'obtient sous (V1),(V2),(f1),(f2)'.

Proposition 3.1 *Soit $\{u_n\}$ une suite de Palais-Smale bornée pour I. Alors il existe une sous-suite de $\{u_n\}$, toujours notée $\{u_n\}$, un entier $l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, des suites $\{y_n^k\} \subset \mathbf{R}^N$, $w^k \in H$ pour $1 \leq k \leq l$ tels que,*

(i) $u_n \rightharpoonup u_0$ *avec* $I'(u_0) = 0$,

(ii) $|y_n^k| \to \infty$ *et* $|y_n^k - y_n^{k'}| \to \infty$ *pour* $k \neq k'$,

(iii) $w^k \neq 0$ *et* $I^{\infty\prime}(w^k) = 0$ *pour* $1 \leq k \leq l$,

(iv) $||u_n - u_0 - \sum_{k=1}^{l} w^k(\cdot - y_n^k)|| \to 0$,

(v) $I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{k=1}^{l} I^{\infty}(w^k)$,

où l'on suppose que dans le cas $l = 0$ les résultats ci-dessus sont vrai sans w^k, $\{y_n^k\}$. Ici

$$I^{\infty}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 + V(\infty)u^2 dx - \int_{\mathbf{R}^N} F(u)dx.$$

Remarque 3.4 *Cette proposition signifie "intuitivement" que toute suite de Palais-Smale bornée pour I se décompose en un point critique de I et d'une somme finie de points critiques de la fonctionnelle à l'infini qui s'éloignent infiniment les uns des autres.*

Un deuxième outil est donné par les propriétés des équations autonomes de la forme

$$-\Delta u = g(u), \qquad u \in H^1(\mathbf{R}^N). \tag{9}$$

Une solution v de (9) est dite dite de moindre énergie ssi

$$J(v) = m, \text{ où } m = \inf\{J(u);\, u \in H \setminus \{0\} \text{ est une solution de } (9)\}. \tag{10}$$

Ici $J : H^1(\mathbf{R}^N) \to \mathbf{R}$ est la fonctionnelle naturelle correspondant à (9)

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2\, dx - \int_{\mathbf{R}^N} G(u)\, dx$$

avec $G(s) = \int_0^s g(\tau)\, d\tau$. Les résultats suivants sont du à Berestycki-Lions [BL] pour $N = 1$ et $N \geq 3$ et Berestycki-Gallouët-Kavian [BGK] pour $N = 2$.

Théorème 3.1 *On suppose que*

(g0) $g \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ *est continue et impaire.*

(g1) $-\infty < \liminf_{s\to 0} \dfrac{g(s)}{s} \leq \limsup_{s\to 0} \dfrac{g(s)}{s} = -\nu < 0$ *pour* $N \geq 3$,
$\lim_{s\to 0} \dfrac{g(s)}{s} = -\nu \in (-\infty, 0)$ *pour* $N = 1, 2$.

(g2) Lorsque $N \geq 3$, $\lim_{s\to\infty} \dfrac{|g(s)|}{s^{\frac{N+2}{N-2}}} = 0$.
Lorsque $N = 2$, *pour tout* $\alpha > 0$ *il existe* $C_\alpha > 0$ *tel que*

$$|g(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2} \quad \textit{for all } s \geq 0.$$

(g3) Lorsque $N \geq 2$, *il existe* $\xi_0 > 0$ *tel que* $G(\xi_0) > 0$.
Lorsque $N = 1$, *il existe* $\xi_0 > 0$ *tel que*

$$G(\xi) < 0 \textit{ pour tout } \xi \in]0, \xi_0[, \quad G(\xi_0) = 0 \quad \textit{et} \quad g(\xi_0) > 0.$$

Alors J *est bien définie et de classe* C^1. *Aussi* $m > 0$ *et il existe une solution de moindre énergie* ω *de (9) qui est une solution classique et qui satisfait* $\omega > 0$ *sur* $\mathbf{R}^N$.

Dans [JT2] pour $N \geq 2$ et [JT3] pour $N = 1$ ce résultat est complété de la manière suivante:

Théorème 3.2 *On suppose (g0)–(g3). Alors en posant*

$$\Gamma_J = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbf{R}^N)), \gamma(0) = 0 \text{ and } J(\gamma(1)) < 0\},$$

il vient $\Gamma_J \neq \emptyset$ *et* $b = m$ *avec*

$$b = \inf_{\gamma \in \Gamma_J} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) > 0.$$

De plus pour toute solution de moindre énergie ω *de (9) comme donnée dans le Théorème 3.2 il existe un chemin* $\gamma \in \Gamma$ *tel que* $\gamma(t)(x) > 0$ *pour tout* $(t,x) \in (0,1] \times \mathbf{R}^N$, $\omega \in \gamma([0,1])$ *et*

$$\max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) = b.$$

Idée de la preuve : La preuve est différente selon les cas $N \geq 3$, $N = 2$ et $N = 1$. Le degré de difficulté est le plus grand pour $N = 1$! Nous montrons simplement ici, dans le cas $N \geq 3$, que $c \leq m$. Notons juste qu'il n'est pas évident que $c \geq m$ car on ne sait pas à priori qu'il existe un point critique au niveau c. On admettra que J possède une géométrie de col. Considérons le chemin

$$t \to \omega(x/t) \equiv \gamma(t) \quad \text{for } t > 0.$$

Pour prouver que $c \leq m$ il suffit de montrer que

(i) $\gamma(t) \to 0$ si $t \to 0^+$.

(ii) $J(\gamma(t)) \to -\infty$ as $t \to \infty$.

(iii) $\max_{t>0} J(\gamma(t)) \leq J(\omega) = m$.

Il vient que

$$||\gamma(t)||^2_{H^1(\mathbf{R}^N)} = t^{N-2}||\nabla\omega||_2^2 + t^N||\omega||_2^2 \to 0 \text{ si } t \to 0$$

et en utilisant l'identité de Pohozaev (8),

$$J(\gamma(t)) = \frac{t^{N-2}}{2}||\nabla\omega||_2^2 - t^N \int_{\mathbf{R}^N} G(\omega)\,dx = \left(\frac{1}{2}t^{N-2} - \frac{N-2}{2N}t^N\right)||\nabla\omega||_2^2.$$

On vérifie facilement que $\frac{d}{dt}J(\gamma(t)) > 0$ pour $t \in]0,1[$ et $\frac{d}{dt}J(\gamma(t)) < 0$ pour $t \in]1,+\infty[$. Après un changement de paramètre on a donc bien le résultat désiré. ♠

Remarque 3.5 *Le Théorème 3.2 peut être étendu à des situations où (9) est remplacé par une équation quasilinéaire (voir [Sq]) où encore un système d'équations. Le point clef est que l'équation (le système) soit autonome et posé sur tout l'espace.*

Fin de la preuve du Théorème 2.2 : Clairement il reste juste à montrer (voir le Lemme 2.2) que si I possède une suite de Palais-Smale bornée $(u_n) \subset H^1(\mathbf{R}^N)$ au niveau c alors $u_n \to u_0$ pour un $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^N)$.

Remarquons que si $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^N)$ est un point critique de I alors $I(u_0) \geq 0$. En effet (par (f3)(i))

$$0 = I'(u_0)u_0 = ||u_0||^2 - \int_{\mathbf{R}^N} f(u_0)u_0 dx \leq ||u_0||^2 - 2F(u_0) = 2I(u_0).$$

Maintenant si l'on suppose que $c < m$. De la Proposition 3.1 il vient que $u_n \to u_0$. Pour montrer que $c < m$ on utilise le chemin particulier de la preuve du Théorème 3.2. Clairement on peut supposer que $V(x) \neq V(\infty)$ sur un ensemble de mesure non nulle (car sinon le problème est autonome). On obtient alors que

$$c \leq I(\gamma(t)) < I^\infty(\gamma(t)) = m.$$

♠

Remarque 3.6 *Pour prouver que $I(u_0) \geq 0$ si $I'(u_0) = 0$ on a utilisé (f3). Notons que l'on peut obtenir la conclusion du Théorème sans utiliser (f3) à ce point. En effet il suffit de supposer que $I(u_0) = 0$ et l'on obtient une contradiction à partir de la Proposition 3.1. Comme u_n ne converge pas fortement vers u_0 il reste a montrer que $I'(u_0) = 0$ ce qui est facile (montrer pour cela que $I'(u)\phi = 0$ pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ en utilisant les propriétés de la convergence faible, notamment que $u_n \to u$ dans $L^p_{loc}(\mathbf{R}^N)$ et conclure par densité).*

Bibliographie

[BL] Berestycki H. et Lions P.L., Nonlinear scalar field equations I, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **82**, (1983), 313-346.

[BGK] Berestycki H., Gallouët T. et Kavian O., *Equations de Champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan*, C. R. Acad. Sci; Paris Ser. I Math. **297** (1983), 5, 307-310 and Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université de Paris VI, (1984).

[E] Ekeland I., Convexity methods in Hamiltonian Mechanics, *Springer*, (1990).

[EL] Esteban M.J. et Lions P-L., *Existence and nonexistence results for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **93A**, (1982), 1-14.

[GJ] Giacomoni J. et Jeanjean L., *A variational approach to bifurcation from spectral gaps*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **28** (1999), 651–674.

[J1] Jeanjean L., *On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer type problem set on* $\mathbf{R}^N$, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **129A**, (1999), 787-809.

[J2] Jeanjean L., *Local conditions insuring bifurcation from the continuous spectrum*, *Math. Zeit.* **232** (1999), 651–674.

[JT1] Jeanjean L. et Tanaka K., *A positive solution for an asymptotically linear elliptic problem on* $\mathbf{R}^N$ *autonomous at infinity*, ESAIM Cont. Optim. Calc. Var. **7** (2002), 597–614.

[JT2] Jeanjean L. et Tanaka K., *A remark on least energy solutions in* $\mathbf{R}^N$, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 2399–2408.

[JT3] Jeanjean L., Tanaka K., A note on a mountain pass characterization of least energy solutions, *Adv. Nonli. Studies*, **3**, (2003), 445-455.

[JT4] Jeanjean L. et Tanaka K., *Singularly perturbed elliptic problems with superlinear or asymptotically linear nonlinearities*, *Cal. Var.* and *PDE* **21** (2004), 287-318.

[JT5] Jeanjean L. et Tanaka K., *A positive solution for a nonlinear Schrodinger equation on* $\mathbf{R}^N$ *Indiana Univ. Journal* **54**, 2, (2005), 443-464.

[JT] Jeanjean L. et Toland J.F., *Bounded Palais-Smale Mountain-Pass sequences*, C. R. Acad. Sci. Paris, **t. 327**, 1, 1998, 23-28.

[L1] Lions P.L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. Part I and II.*, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non-lin.*, **1** (1984), 109-145 and 223-283.

[L2] Lions P.L., *The concentration–compactness principle in the calculus of variations Rev. Mat. Iberoamericana*, **1**, (1985), 145-201.

[P] Pohozaev S., Eigenfunctions of the equations $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Soviet Math. Dokl.*, **6**, (1965), 1408-1411.

[R] Rabinowitz P.H., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS 65, Amer. math. Soc. Providence, R.I. (1986).

[S] Saks S., Theory of the Integral, *Hafner, New York*, (1937).

[Sq] Squassina M., *Spike solutions for a class of singularly perturbed quasilinear elliptic equations Nonlinear Anal.*, **54**, 7, (2003), 1307-1336.

[Str] Struwe M., *Variational Methods*, Springer, Second Edition, (1996).

[Stu1] Stuart C.A., Bifurcation in $L^p(\mathbf{R}^N)$ for a semilinear elliptic equation, *Proc. London Math. Soc.*, **57**, (1988), 511-541.

[Stu2] Stuart C.A., Bifurcation into spectral gaps, *Société Mathématique de Belgique*, (1995).

[SZ] Szulkin A. and Zou W., Homoclinic orbits for asymptotically linear Hamiltonian systems, *J. Funct. Anal.*, Vol. **187** (2001), 25-41.

[W1] Willem M., Minimax Theorems, *Birkhaüser*, Boston, (1996).

[W2] Willem M., Analyse harmonique réelle, *Hermann*, Paris, (1995).