Méthodes Variationnelles et Applications à Quelques Problèmes d'Analyse Non Linéaire

Mémoire d'habilitation de Louis Jeanjean

e-mail : jeanjean@math.univ-mlv.fr

Comme c'est la coutume, ce mémoire d'habilitation rassemble mes résultats mathématiques depuis le début de ma thèse de doctorat, en 1989. Son sujet principal est le développement de méthodes variationnelles et leurs applications à des problèmes non linéaires. Après une introduction aux méthodes variationnelles dans la section 1, je présente mes résultats dans les sections 2 à 5. Dans la section 2, je considère des problèmes semi-linéaires dans lesquels le spectre essentiel du problème linéarisé associé possède des lacunes. J'étudie l'existence de solutions dans les lacunes et leurs éventuelles bifurcations depuis les points frontières du spectre. La section 3 est consacrée à l'étude de l'existence d'orbites homoclines pour des systèmes hamiltoniens du second ordre. J'y présente, en particulier, des résultats de multiplicité pour des systèmes à potentiel singulier. Dans la section 4, trois résultats de type elliptique sont décrits. L'un concerne l'existence de solutions de norme prescrite dans un problème aux valeurs propres non linéaire, dans le second j'obtiens deux solutions positives pour un problème non homogène posé sur $\mathbf{R}^N$ et le dernier est relié à une conjecture de De Giorgi. Finalement, dans la section 5, je développe une approche générale pour l'existence d'une suite de Palais-Smale bornée dans le lemme du col. Cette approche est utilisée pour obtenir une solution d'un problème de Landesmann-Lazer posé sur $\mathbf{R}^N$ et pour généraliser les résultats de bifurcation décrit dans la section 2.

Excepté en quelques occasions, les théorèmes présentés dans ce mémoire n'ont pas la généralité de ceux de mes articles. L'objectif est ici d'aider à la compréhension générale de mes travaux plus que de fournir un catalogue de résultats. Les références alphabétiques renvoient ici à la bibliographie et les références numériques à la liste de mes publications.

1 Introduction aux méthodes variationnelles

Le but de cette section, spécialement rédigée pour les non spécialistes, est de présenter quelques méthodes variationnelles utilisées en analyse non linéaire. Ces méthodes sont illustrées par quelques exemples simples qui mettent en évidence les difficultés principales auxquelles on est confronté lorsque l'on essaye de développer une procédure variationnelle.

Cette section préliminaire est aussi l'occasion d'introduire des définitions et des notations qui seront utilisées constamment dans ce travail. Considérons l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, $N \geq 3$ est un ouvert borné régulier et $p > 0$ un paramètre donné. On s'intéresse aux solutions faibles non triviales $u \in H_0^1(\Omega)$ de (1.1). On pose $H := H_0^1(\Omega)$.

Utiliser une méthode variationnelle en analyse non linéaire signifie, en gros, que plutôt que de chercher directement une solution d'une EDP, ou d'un système hamiltonien, on considère le problème équivalent de trouver un point critique d'une fonctionnelle. Ici la fonctionnelle naturellement associée à (1.1) est $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbf{R}$ définie par

$$F(u) = \frac{1}{2}||\nabla u||_2^2 - \frac{1}{p+1}||u||_{p+1}^{p+1}$$

où $||\cdot||_q$ pour $q \in [1, \infty]$ désigne la norme usuelle sur l'espace de Lebesgue $L^q(\Omega)$. On sait que F est bien définie et de classe C^1. De plus, tout point critique de F est une solution de (1.1), si par point critique on entend un élément u de H tel que $F'(u) = 0$ (i.e. $F'(u)v = 0,\ \forall v \in H$). Notons que $u = 0$ est solution de (1.1) et par suite nous nous intéresserons seulement à des points critiques non triviaux. L'espace H est muni de la norme $||u|| := ||\nabla u||_2$ qui, à cause de l'inégalité de Poincaré, est équivalente à la norme standard. Rappellons que l'inclusion

$$H \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ est continue pour } q \in [1, \frac{2N}{N-2}] \text{ et compacte pour } q \in [1, \frac{2N}{N-2}[.$$

Le comportement de F est différent selon la valeur de $p > 0$. Nous distinguons trois cas :

(1) $p \in]0, 1[$ **:** puisque $H \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ continûment, alors par définition il existe $C = C(p+1) > 0$ tel que $||u||_{p+1} \leq C||u||$ pour tout $u \in H$. Par suite

$$F(u) \geq \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{C}{p+1}||u||^{p+1} \tag{1.2}$$

et donc $F(u) \geq \frac{1}{4}||u||^2$ pour $||u||$ suffisamment grand. Ceci prouve que F est coercive. Montrons maintenant que

$$-\infty < m := \inf_{u \in H} F(u) < 0. \tag{1.3}$$

Clairement la coercivité et la régularité de F impliquent que $-\infty < m$. Pour prouver que $m < 0$, on choisit un $u \in H\backslash\{0\}$ quelconque et l'on teste F sur les fonctions tu, $t \geq 0$. Il vient

$$F(tu) = \frac{t^2}{2}||u||^2 - \frac{t^{p+1}}{p+1}||u||_{p+1}^{p+1}. \tag{1.4}$$

Comme $p < 1$, le terme négatif donne la contribution principale lorsque $t \to 0$, d'où (1.3). Par suite, si F a un minimum global, il correspond à une solution non triviale de (1.1). Pour prouver que l'infimum m est atteint considérons une suite minimisante $\{u_n\} \subset H$, c'est à dire telle que $F(u_n) \to m$ lorsque $n \to \infty$. Puisque F est coercive, $\{u_n\}$ est bornée et on peut supposer que $u_n \rightharpoonup u$ pour un $u \in H$ (on note $\rightharpoonup$ la convergence pour la topologie faible). On a alors $||u|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||u_n||$ et, comme l'inclusion $H \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, est compacte, $u_n \to u$ dans $L^{p+1}(\Omega)$. Par suite,

$$m \leq F(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}||u_n||^2 - \frac{1}{p+1}||u_n||_{p+1}^{p+1} \right) = m.$$

(2) $p \in]1, \frac{2N}{N-2}[$ **:** Dans ce cas F n'est plus bornée inférieurement. En effet, par (1.4), et puisque $p > 1$, $F(tu) \to -\infty$ lorsque $t \to +\infty$ et on peut aussi montrer que F est non bornée supérieurement. Par suite F n'a pas d'extremum global, et nous devons chercher un point critique qui a une caractérisation variationnelle plus complexe. On choisit un $v \in H$ satisfaisant $F(v) < 0$ et on considère l'ensemble Γ des chemins joignant 0 à v,

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}. \tag{1.5}$$

On définit la valeur minimax

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} F(\gamma(t)). \tag{1.6}$$

Montrons tout d'abord que

$$c > \max\{F(0), F(v)\}. \tag{1.7}$$

En utilisant (1.2) il vient que $F(u) \geq \frac{1}{4}||u||^2$ pour $||u||$ suffisamment petit. En particulier, il existe un $\rho > 0$ tel que $\rho < ||v||$ et $F(u) \geq \frac{1}{4}\rho^2$ si $||u|| = \rho$. Comme chaque chemin de Γ doit traverser la sphère $||\cdot|| = \rho$, cela prouve (1.7).

On dit qu'une fonctionnelle qui satisfait (1.7) pour un $v \in H$ et un c défini comme dans (1.6) a une *géométrie de col* (voir [AR]). La valeur c est appelée le niveau du col. L'intuition suggère de chercher un point critique $u \in H$ tel que $F(u) = c$. Comme nous allons le voir un tel point critique peut ne pas exister, cependant une conséquence de la géometrie de F est l'existence d'une suite $\{u_n\} \subset H$, telle que,

$$F(u_n) \to c \ \text{ et } F'(u_n) \to 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega).$$

Une telle suite est appellée une *suite de Palais-Smale*, en abrégé une suite PS, au niveau du col. Son existence peut être prouvée en utilisant le principe variationnel d'Ekeland (voir [E1]), ce résultat est connu sous le nom de lemme du col. En fait, déjà dans le cas **(1)**, il aurait été possible de choisir une suite minimisante ayant la propriété additionnelle que $F'(u_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Pour poursuivre la preuve comme dans le cas **(1)**, on doit montrer que $\{u_n\}$ est bornée. Par définition de F et puisque $F(u_n) \to c$ nous avons

$$||u_n||^2 - \frac{2}{p+1}||u_n||_{p+1}^{p+1} \to 2c. \tag{1.8}$$

Aussi $F'(u_n) \to 0$ s'écrit

$$-\Delta u_n - |u_n|^{p-1}u_n \to 0 \text{ dans } H^{-1}. \tag{1.9}$$

En multipliant (1.9) par u_n et en intégrant sur Ω on obtient

$$\Big|\ ||u_n||^2 - ||u_n||_{p+1}^{p+1}\ \Big| \leq \varepsilon_n ||u_n|| \tag{1.10}$$

avec $\varepsilon_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Maintenant, puisque $p > 1$, la différence d'homogénéité entre (1.8) et (1.10) implique que $\{||u_n||\}$ est bornée. Donc, comme précédemment, on peut supposer que $u_n \rightharpoonup u$ dans H et que

$$u_n \to u \text{ dans } L^q(\Omega) \text{ pour tout } q \in [1, \frac{2N}{N-2}[. \tag{1.11}$$

L'étape suivante consiste à montrer que $u_n \to u$ dans H. Puisque $u_n \to u$ dans $L^{p+1}(\Omega)$ nous savons, en utilisant (1.10), que $||u_n||^2 \to ||u||_{p+1}^{p+1}$. De plus, par (1.9), il vient que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u - \int_\Omega |u_n|^{p-1}u_n u \to 0. \tag{1.12}$$

Par définition de la convergence faible

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla u \to \int_\Omega |\nabla u|^2 = ||u||^2$$

et, grâce à (1.11), à la convergence faible et à l'inégalité de Hölder,

$$\int_\Omega |u_n|^{p-1}u_n u \to \int_\Omega |u|^{p+1} = ||u||_{p+1}^{p+1}.$$

On conclut maintenant, grâce à (1.12), que $||u||^2 = ||u||_{p+1}^{p+1}$. Puisque $||u_n||^2 \to ||u||_{p+1}^{p+1}$ il vient finalement que $||u_n||^2 \to ||u||^2$. Cela prouve (voir Proposition III.30. de [Br]) que $u_n \to u$ dans H et comme F et F' sont continues, u est un point critique de F au niveau du col c. Puisque $c > 0 = F(0)$, u est non trivial.

(3) $p = \frac{N+2}{N-2}$ **:** Dans ce cas la fonctionnelle F possède encore une *géométrie de col*. De plus toutes les suites PS sont bornées. En particulier, il existe $\{u_n\} \subset H$ telle que $F(u_n) \to c$, $F'(u_n) \to 0$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans H. La différence avec le cas **(2)** est que $u_n \rightharpoonup u$ n'implique plus que $u_n \to u$ in $L^{p+1}(\Omega)$. L'inclusion $H \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ n'est pas compacte. Ce n'est pas seulement une difficulté technique ; une conséquence de l'identité de Pohozaev (voir [P]) est que F n'a pas de point critique au niveau c (sur un domaine Ω étoilé).

Les exemples que nous avons traités illustrent les trois principales difficultés que l'on rencontre lorsqu'on cherche à développer une approche variationnelle. En premier lieu, il convient d'identifier un niveau critique probable. Cette question est reliée à la géométrie de la fonctionnelle. Notons que dans beaucoup de cas il est souhaitable de choisir une formulation variationnelle, peut-être pas la plus immédiate mais la plus pratique. Dans certains cas on cherchera des points critiques sous contraintes. Par exemple, il est aussi possible d'obtenir une solution de (1.1) comme minimum d'une fonctionnelle sur une sphère de H. Divers exemples sont donnés dans les sections 2 à 5. Mes contributions à ce sujet sont contenues dans [2],[8] et [10]. Ensuite, il convient de montrer qu'il existe des suites de Palais-Smale bornées pour la fonctionnelle au niveau critique suspecté. Cette difficulté est le point central [7] et [8] et toute la section 5 y est consacrée. Finalement, il faut prouver la convergence, dans un sens suffisamment fort, de ces suites de Palais-Smale. Dans nos exemples cela correspond à passer de la convergence faible à la convergence forte pour $\{u_n\}$. J'ai étudié ce type de problème principalement dans [2],[6],[9],[10],[11] et [15].

2 Problèmes avec lacunes spectrales : [1,2,3,4,5]

Dans cette section on étudie des problèmes semi-linéaires où le spectre de la linéarisation associée présente des lacunes. Considérons comme cas modèle une équation de la forme

$$-\Delta u(x) + p(x)u(x) - f(x, u(x)) = \lambda u(x),\ x \in \mathbf{R}^N,\ \lambda \in \mathbf{R}, \tag{2.1}$$

où $p \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ est une fonction périodique sur $\mathbf{R}^N$ et pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, $f(x,\cdot) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est impaire, et a une croissante sur-linéaire à l'origine et à l'infini.

On s'intéresse aux solutions non triviales de l'équation (2.1), c'est à dire aux couples $(\lambda, u) \in \mathbf{R} \times H^1(\mathbf{R}^N)$ qui satisfont (2.1) au sens faible, ainsi qu'à l'existence de points de bifurcation. Nous appelons point de bifurcation une valeur $l \in \mathbf{R}$ pour laquelle il existe une suite $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbf{R} \times H^1(\mathbf{R}^N)$ de solutions de (2.1) avec pour tout n, $u_n \neq 0$ et $(\lambda_n, u_n) \to (l, 0)$ dans $\mathbf{R} \times H^1(\mathbf{R}^N)$.

La linéarisation de (2.1) joue un rôle central dans ces problèmes. C'est l'équation de Schrödinger périodique

$$-\Delta u(x) + p(x)u(x) = \lambda u(x).$$

Le spectre associé σ, est réel, purement continu, et consiste en une union disjointe d'intervalles fermés. Nous nous concentrons sur les questions suivantes :

1. Existe-t-il une (ou plusieurs) solution non triviale pour tout λ dans $\mathbf{R}\backslash\sigma$?

2. Est-ce qu'un point frontière donné est un point de bifurcation ?

Puisque $f(x,\cdot)$ est sur-linéaire, tous les points de bifurcation de (2.1) doivent appartenir à σ. Remarquons aussi que σ étant purement continu, les méthodes classiques de bifurcation depuis une valeur propre (voir [R1]) ne peuvent pas être appliquées, du moins directement. Finalement mentionnons qu'il est conjecturé, et démontré dans $\mathbf{R}$ sous des conditions générales [KS2], que (2.1) n' a pas de solutions non triviales dans $H^1(\mathbf{R}^N)$ lorsque $\lambda \in \sigma$.

Une approche naturelle pour étudier l'existence d'une solution de (2.1) pour un λ fixé consiste à chercher un point critique de la fonctionnelle I_λ définie sur $H^1(\mathbf{R}^N)$ par

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N}(|\nabla u(x)|^2 + (p(x)-\lambda)u^2(x))dx - \int_{\mathbf{R}^N} F(x,u(x))dx \text{ où } F(x,t) = \int_0^t f(x,p)dp.$$

Notons H_1^- et H_1^+ les deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux de $H^1(\mathbf{R}^N)$ qui sont associés respectivement à la partie négative et positive du spectre de l'équation

$$-\Delta u(x) + (p(x)-\lambda)u(x) = 0.$$

Dans le cas général, H_1^- est de dimension infinie à cause de la présence de spectre essentiel sur la gauche de λ. Cela crée une difficulté lorsqu'on cherche à développer une procédure variationnelle. En particulier les méthodes standards, comme le lemme du col, utilisées lorsque dim $H_1^- < \infty$, échouent. Un autre obstacle provient de ce que l'on cherche des solutions sur un domaine non borné et que donc des pertes de compacité sont possibles.

Pour surmonter ces difficultés, plusieurs approches variationnelles ont été développées depuis 1988. Je vais maintenant présenter ces approches en insistant sur celles où ma contribution est significative. Je supposerai dans le reste de cette section que $]a,b[$ est une lacune spectrale de (2.1), c'est à dire que $[a,b]\cap\sigma = \{a,b\}$.

Solutions à $\lambda \in]a,b[$ fixé : Pour $\lambda \in]a,b[$, fixé, Heinz [H1, H2] a été le premier à obtenir une solution non triviale de (2.1). Il obtient un point critique de I_λ en utilisant un théorème de "linking" dû à Benci et Rabinowitz (voir [BR]). Après avoir établi l'existence d'une solution u_λ pour tout $\lambda \in]a,b[$, il utilise le fait que $I_\lambda(u_\lambda)$ a une caractérisation minimax pour étudier la bifurcation au point b. Il montre qu'elle advient si $I_\lambda(u_\lambda)(b-\lambda)^{-1} \to 0$ lorsque $\lambda \to b$. La difficulté principale réside alors dans la construction d'une famille de fonctions tests sur laquelle I_λ peut être évaluée. Ceci est fait en exploitant la notion de fonction de Bloch pour l'opérateur de Schrödinger périodique. L'approche de Heinz a ensuite été généralisée dans [HS, HKS] et dans [Bu] (voir aussi [2]) il est prouvé que la bifurcation depuis l'extrémité inférieure a de la lacune est impossible. C'est une conséquence du signe du terme non linéaire dans (2.1). La limitation principale de cette approche est qu'elle impose au terme non linéaire d'être compact (pour tout t, on a $\lim_{|x|\to\infty} f(x,t) = 0$). Cette compacité est un ingrédient clef du théorème de Benci-Rabinowitz.

En collaboration avec B. Buffoni et C.A. Stuart, j'ai développé dans [3] une approche alternative à l'existence d'un point critique de I_λ dans laquelle il est possible d'éliminer l'hypothèse de compacité. Nous utilisons une réduction de Lyapunov-Schmidt pour contrôler la partie des solutions appartenant au sous-espace H_1^-. Plus précisement nous montrons que si $u \in H^1(\mathbf{R}^N)$ est un point critique de I_λ, il peut être écrit sous la forme $u = v+g(\lambda, v)$ où $v \in H_1^+$, $g(\lambda, v) \in H_1^-$ et g est de classe C^1. Cela nous conduit à étudier la fonctionnelle $F_\lambda : H_1^+ \to \mathbf{R}$ définie par $F_\lambda(v) := I_\lambda(v + g(\lambda, v))$. Cette fonctionnelle a la propriété que si v est un de ses points critiques alors $v + g(\lambda, v)$ est un point critique de I_λ. Il est alors possible d'appliquer le lemme du col (voir [BN2]) pour obtenir un point critique non trivial de F_λ pour tout $\lambda \in]a, b[$. Simple techniquement, cette approche permet de traiter des non-linéarités qui sont compactes ou autonomes (i.e. où $f(x,t) = f(t)$). Elle a cependant le défaut que, comme dans l'approche de Heinz, la fonction $F(x, \cdot)$ doit être convexe pour pouvoir effectuer la réduction de Lyapunov-Schmidt. Nous développons tout d'abord cette méthode dans un espace de Hilbert abstrait. Ensuite nos résultat sont appliqués à (2.1) avec

$$f(x, u(x)) = u(x) \int_{\mathbf{R}^3} \frac{u^2(y)}{|x-y|} dy.$$

Avec cette non-linéarité, (2.1) devient une version généralisée du modèle dit de Choquard-Pekar, bien connu en physique du solide (voir [3]). L'approche que nous avons développée a par la suite permis à Buffoni [Bu] et à Stuart [Stu5] d'étudier la bifurcation en b et l'existence d'orbites homoclines de systèmes hamiltoniens.

Pour traiter des termes non linéaires qui ne sont ni compacts ni autonomes, j'ai développé dans [4] une autre approche, poursuivant une voie ouverte par Alama et Li [AL1]. C'est une méthode duale rappelant celle de [BCN] (voir aussi [CES]). Par rapport à l'approche précédente elle a le défaut de dépendre fortement de la forme spécifique de (2.1). En particulier la condition de convexité est nécessaire. En posant pour chaque x fixé :

$$g(x, .) = f^{-1}(x, .) \text{ et } G(x, s) = \int_0^s g(x, p) dp,$$

on considère dans l'ensemble

$$L_G := \{v \; ; \; \int_{\mathbf{R}^N} G(x, v) dx < \infty\},$$

l'équation

$$A_\lambda v = g(x, v) \tag{2.2}$$

où A_λ est l'opérateur inverse $(-\Delta + p - \lambda)^{-1}$. A partir d'une solution de (2.2), on construit une solution de (2.1) dans $H^2(\mathbf{R}^N)$. L'équation (2.2) est résolue à l'aide d'une procédure variationnelle. Formellement au moins, un point critique de $J_\lambda : L_G \longrightarrow \mathbf{R}$ avec

$$J_\lambda(v) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} v(A_\lambda v) dx + \int_{\mathbf{R}^N} G(x, v) dx,$$

correspond à une solution de (2.2). A cause de l'inversion, le terme $\int_{\mathbf{R}^N} G(x, v) dx$ est sous-linéaire et domine lorsque v est petit. La structure géométrique de J_λ est donc du type requis dans le théorème du col. Il n'est pas clair cependant qu'une condition de type

Palais-Smale soit satisfaite par J_λ. Pour obtenir de la compacité, on développe une version de la méthode de la contrainte naturelle (voir [N]). Au lieu de chercher directement un point critique libre de J_λ, cela revient à étudier la restriction de J_λ à l'ensemble

$$V_\lambda := \{v \in L_G \backslash \{0\} \ ; \ J'_\lambda(v)v = 0\}.$$

On montre que toute suite minimisante de J_λ sur V_λ admet une sous-suite qui converge faiblement vers un point critique. Le fait que l'une au moins de ces limites faibles est non nulle est établi en comparant J_λ avec une fonctionnelle auxiliaire. Pour cette dernière étape, il est essentiel de pouvoir définir un problème à l'infini, comme dans le travail de P.L. Lions sur la compacité par concentration [L1]. Après avoir trouvé une solution pour tout $\lambda \in]a, b[$, j'ai étudié dans [5] la bifurcation en $\lambda = b$.

Pour illustrer mes résultats, montrons comment ils s'appliquent à la non-linéarité typique

$$f(x,t) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x)|t|^{p_i} t \tag{2.3}$$

où l'on suppose que, pour tout $1 \leq i \leq n$,

(1) $r_i \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$, $r_i(x) \geq 0$ p.p. sur $\mathbf{R}^N$,

(2) $0 < p_i < \frac{4}{N-2}$ pour $N \geq 3$ et $p_i > 0$ pour $N = 1, 2$.

Dans ce cas particulier j'obtiens l'existence d'une solution de (2.1) pour tout $\lambda \in \mathbf{R}\backslash\sigma$ sous les hypothèses additionnelles que, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\lim_{|x|\to\infty} r_i(x) = r_i(\infty) \text{ et } r_i(x) \geq r_i(\infty) > 0 \text{ p.p. sur } \mathbf{R}^N.$$

De plus la bifurcation advient, si pour au moins un i on a, $0 < p_i < \frac{4}{N}$. Il est important de remarquer que seule la condition $r_i \geq r_i(\infty)$ p.p. sur $\mathbf{R}^N$ est nécessaire pour discuter la convergence faible des suites minimisantes. On ne bénéficie donc pas d'une inégalité stricte entre "l'énergie" du problème et celle du problème à l'infini associé. Cette inégalité stricte est cruciale dans l'approche classique de Lions. Pour pouvoir admettre une égalité, je développe une approche générale (voir Th. 2.2 de [4]).

Si d'Alama et Li [AL1] ont eu les premiers l'idée d'inverser l'équation (2.1) et de résoudre un problème variationnel dual, leur approche est fortement élargie et renouvelée dans [4] car ils pouvaient seulement considérer des non-linéarités autonomes. Cette restriction était profondément liée au choix de la méthode variationnelle utilisée pour résoudre (2.2). C'est une sorte de lemme du col qui nécessite l'invariance par translation de (2.1). De plus la bifurcation des solutions n'est pas étudiée dans [AL1].

Récemment, des améliorations substantielles des résultats précédents sur (2.1) ont été obtenues par Troestler et Willem [TW] (voir aussi [W]) qui ont montrés l'existence d'une solution non-triviale pour tout $\lambda \in]a, b[$, sans hypothèse de convexité ni de compacité. Leur argument est basé sur un théorème de “linking” généralisé dû à Hofer et Wysocki (voir [HW]) qui avait déjà été utilisé par Esteban et Séré pour étudier une équation de Dirac non linéaire avec lacunes spectrales [ES]. L'approche de [TW] a été étendue par Troestler [Tr] qui a montré que la bifurcation peut advenir en b sans convexité ni compacité par des arguments, qui comme ceux de [TW], exploitent la forme spécifique de (2.1). Nous reviendrons sur ce résultat dans la section 5.

L'approche avec contrainte : J'ai aussi étudié la bifurcation par une méthode totalement différente. En collaboration avec B. Buffoni, j'ai généralisé dans [1] et [2] une approche variationnelle avec contrainte due à Küpper et Stuart [KS1]. Plutôt que de chercher une solution u_λ pour tout $\lambda \in]a, b[$ fixé et de vérifier ensuite que $u_\lambda \to 0$ lorsque $\lambda \to b$, l'idée est de chercher directement des solutions de petite norme. On construit une suite de solutions

$$\{(u_n, \lambda_n)\} \subset H^1(\mathbf{R}^N) \times]a, b[$$

en imposant à $||u_n||_{H^1(\mathbf{R}^N)}$ d'avoir une valeur maximale fixée qui tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. Ensuite on vérifie que $\lambda_n \to b$ ce qui prouve que b est un point de bifurcation. Plus précisement considérons une suite $\{c_n\} \subset \mathbf{R}^+$ avec $c_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Il est bien connu que si $u_n \in H^1(\mathbf{R}^N)$ est un point critique de la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u(x)|^2 + p(x) u^2(x)) dx - \int_{\mathbf{R}^N} F(x, u(x)) dx,$$

sous la contrainte

$$S(c_n) := \{u \in H^1(\mathbf{R}^N) \ ; \ ||u||_{L^2(\mathbf{R}^N)} = c_n\},$$

alors il existe un multiplicateur de Lagrange λ_n tel que (λ_n, u_n) satisfait (2.1). Clairement tout les points critiques ne sont pas intéressants car on impose que $\lambda_n \in]a, b[$ et que $\lambda_n \to b$. Pour trouver des solutions convenables, on reprend la décomposition de $H^1(\mathbf{R}^N)$ introduite précédemment. Soit P le projecteur orthogonal de $H^1(\mathbf{R}^N)$ sur H_1^+. Pour tout $v \in H_1^+ \backslash \{0\}$, on définit l'ensemble

$$M(v) := \left\{ u \in H^1(\mathbf{R}^N) \ ; \ \|u\|_{L^2} = \|v\|_{L^2} \text{ et } Pu = \frac{\|Pu\|_{L^2}}{\|v\|_{L^2}} v \right\}$$

qui peut être considéré comme un “méridien” de direction v sur la sphère de rayon $||v||_{L^2}$. L'idée est alors d'étudier, pour tout n fixé,

$$m(c_n) := \inf_{v \in S(c_n) \cap H_1^+} \sup_{u \in M(v)} J(u).$$

On montre tout d'abord que pour $c_n > 0$ suffisamment petit, toutes les suites $\{v_k\}$ dans $S(c_n) \cap H_1^+$ qui satisfont

$$\lim_{k \to +\infty} \sup_{u \in M(v_k)} J(u) = m(c_n),$$

sont (sans restriction de généralité) situées dans l'ensemble

$$V := \left\{ v \in H_1^+; \int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla v(x)|^2 + p(x)v(x)^2)dx < (b+1)||v||_{L^2} \right\}.$$

C'est une conséquence du fait que la non-linéarité est sur-linéaire à l'origine. Pour $v \in V$ de petite norme, le maximum de J sur $M(v)$, est atteint en un unique point $G(v)$. On étudie ensuite la régularité en v de $G(v)$ et l'on montre qu'il est possible de définir une fonctionnelle $I \in C^1(B_r, \mathbf{R})$ avec $B_r = \{v \in V; ||v||_{L^2} < r\}$ par

$$I(v) = (J \circ G)(v).$$

On peut supposer que $c_n < r$ pour tout n. Grâce à la caractérisation variationnelle de G, on obtient que v est un point critique de I sous la contrainte $S(c_n) \cap V$ si et seulement si $G(v)$ est un point critique de J sous la contrainte $S(c_n)$.

L'étape suivante consiste à étudier, pour tout n fixé, les suites $\{v_k\} \subset S(c_n) \cap V$ qui satisfont $I(v_k) \to m(c_n)$. On montre que l'une d'entres elles a une limite faible v_{c_n} pour laquelle $G(v_{c_n})$ est une solution de (2.1). La valeur λ_{c_n} associée à $G(v_{c_n})$ dans cette approche est un paramètre variationnel.

Il reste à montrer que $G(v_{c_n}) \neq 0$. Si la non-linéarité est compacte, alors $G(v_{c_n}) \in S(c_n)$. Si la non-linéarité n'est pas compacte, ceci est montré comme dans [4] par une comparaison avec un problème à l'infini. Finalement on établit que la suite de solutions ainsi obtenue bifurque en montrant que $|\lambda_{c_n} - b| \to 0$, lorsque $c_n \to 0$, puis en remarquant que $||G(v_{c_n})||_{H^1} \leq (b+1)||G(v_{c_n})||_{L^2}$. Lorsqu'on applique cette méthode, développée tout d'abord dans un cadre abstrait, à la non-linéarité (2.3) on retrouve le résultat de [4].

Nous terminons cette section en mentionnant les résultats de multiplicité obtenus sur l'équation (2.1). Sous l'hypothèse que la non-linéarité est compacte et impaire, Heinz [H3] a montré que (2.1) a une infinité de solutions pour tout $\lambda \in]a, b[$. Pour cela il utilise un résultat de linking abstrait dû à Benci [Ben]. Il a aussi montré que b est un point de bifurcation de multiplicité infinie, c'est à dire que l'on peut distinguer une infinité de suites de solutions qui bifurquent depuis le point b. Dans [5] je retrouve ce résultat en utilisant cette fois l'approche sous contrainte de [2] et un résultat de type Ljusternik-Schirelmann dû à Berestycki et Lions [BL2]. Un autre résultat de multiplicité a été obtenu par Alama et Li [AL2]. En combinant leur approche duale [AL1] et des idées récentes introduites par Séré [Se1] dans l'étude des orbites homoclines ils montrent l'existence d'une infinité de solutions de type "multibump". La bifurcation n'est pas étudiée dans [AL2]. Finalement mentionnons un article récent de Kryszewki et Szulkin [KS] où des arguments de degré permettent de se dispenser de compacité et de convexité (nécessaire dans l'approche duale). Dans la section 5, je reviendrai sur ces problèmes avec lacunes spectrales et présenterai un résultat de bifurcation abstrait qui contient comme cas particulier ceux de [1,2,5].

3 Orbites homoclines : [6,7,9,11]

A partir de fin 1992, après ma thèse de doctorat à Lausanne, j'ai séjourné un an à l'Ecole Normale Supérieure de Pise. Je me suis intéressé à l'existence et la multiplicité des solutions pour des systèmes du second ordre de la forme

$$\ddot{q}(t) + \nabla_q V(t, q(t)) = 0, \quad q \in \mathbf{R}^N, \ t \in \mathbf{R} \tag{3.1}$$

où $V : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ est un potentiel, éventuellement singulier, qui a un maximum local en zéro pour tout $t \in \mathbf{R}$. En particulier, j'ai étudié l'existence de solutions homoclines à 0, à savoir des solutions non triviales de (3.1) telles que $|q(t)| + |\dot{q}(t)| \to 0$ lorsque $t \to \pm\infty$. Il est connu depuis Poincaré [Poi] que l'étude de telles orbites permet de mieux comprendre la dynamique du système. Le but de mes recherches, toujours en cours, est d'obtenir des conditions géométriques mimimales sur V qui garantissent l'existence d'une ou plusieurs solutions homoclines. Les méthodes classiques sur le sujet, comme par exemple l'approche de Melnikov [M] sont analytiques, souvent perturbatives. C'est seulement depuis dix ans que de tels problèmes ont commencé à être étudiés par des méthodes variationnelles.

Existence d'orbites homoclines : Un des premiers résultats majeur d'existence d'orbites homoclines par des méthodes variationnelles est dû à Coti-Zelati, Ekeland et Séré [CES]. Les auteurs considèrent une classe de systèmes hamiltoniens convexes du premier ordre, périodique en temps et dont l'origine, dans l'espace de phase, est un point stationnaire hyperbolique. Ils établissent l'existence de deux orbites homoclines. Le résultat d'existence de [CES] a été généralisé par Hofer et Wysocki [HW] et Tanaka [Tan2] qui ont éliminé la condition de convexité. Pour des systèmes du deuxième ordre du type de (3.1), à ma connaissance, le premier résultat a été obtenu par Rabinowitz [R4], sous l'hypothèse que $V(t, x)$ est périodique en t et de la forme

$$V(t, x) = -\frac{1}{2}(L(t)x, x) + W(t, x), \; x \in \mathbf{R}^N, \; t \in \mathbf{R}.$$

Ici $L(t)$ est une matrice symétrique définie positive dépendant continûment de t, $W \in C^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N, \mathbf{R})$ satisfait $W(t, x) = 0(|x|)$ lorsque $|x| \to 0$ uniformément en t et

(SQC) il existe $\mu > 2$ tel que $0 \le \mu W(x, s) \le (W_x(t, x), x)$, $x \in \mathbf{R}^N$, $t \in \mathbf{R}$.

Rabinowitz a montré alors que (3.1) a une solution homocline. Ce résultat peut être amélioré si V est autonome, c'est à dire si $V(t, x) = V(x)$. Supposons que

(V1) $V \in C^1(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}), V(0) = 0$ et $V'(0) = 0$

(V2) $\Omega := \{x \in \mathbf{R}^N \; ; \; V(x) < 0\} \cup \{0\}$ est un ouvert borné

(V3) $V'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$.

On vérifie facilement que (V1),(V2) et (V3) impliquent les hypothèses de [R4] et sont nettement plus faibles. Sous ces hypothèses Rabinowitz et Tanaka [RT] montrent l'existence d'une homocline pour (3.1) ayant la propriété supplémentaire que $q(0) \in \partial\Omega$.

Mon premier travail sur les homoclines [6] est une extension du résultat de Rabinowitz et Tanaka. J'ai, tout d'abord, montré que (V3) peut être affaiblie. Plus précisement j'établis que même si $V' = 0$ sur $\partial\Omega$, il existe une large classe de potentiels pour lesquels il y a une orbite homocline. Cette solution est obtenue comme minimum de la fonctionnelle d'énergie

$$I(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}|\dot{u}|^2 dt - \int_{-\infty}^{+\infty} V(u) dt$$

sur l'ensemble

$$\Gamma := \{u \in H \ ; \ u(+\infty) = 0, \ u(-\infty) = \xi \in \partial\Omega, \ u(t) \in \overline{\Omega}, \ \forall t \in \mathbf{R}\}$$

où

$$H := \{u \in H^1_{loc}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^N) \ ; \ \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{u}|^2 dt < +\infty\}.$$

Ce cadre variationnel est semblable à celui introduit dans [RT]. Pour montrer que l'infimum est atteint, je montre qu'il existe une suite minimisante qui converge faiblement vers un $u \in H$ satisfaisant $I(u) \leq \inf_\Gamma I$ et qui, au moins lorsque $u(t) \notin \partial\Omega$, est une solution de (3.1). La partie difficile est alors de prouver que u satisfait les conditions requises à l'infini et qu'en particulier $u \in \Gamma$ (la convergence faible implique la convergence dans $L^\infty_{loc}(\mathbf{R})$ mais pas dans $L^\infty(\mathbf{R})$). A ce point, mon approche diffère de celle de [RT]. Dans [RT], (V3) est utilisée pour montrer que si u n'est pas une homocline, alors nécessairement $I(u) = +\infty$. Je fais un usage plus approfondi de la caractérisation variationnelle de u. Plutôt que d'utiliser seulement le fait que u a une énergie finie, on compare son énergie à celle d'autres éléments de Γ. Cela permet de déduire des informations sur le temps que la solution passe dans un voisinage de $\partial\Omega$ et sur la distance maximale qu'elle y parcourt. Ces informations sont la clef de nos résultats d'existence.

L'hypothèse (V3) avait le désavantage d'interdir l'existence d'orbites hétéroclines joignant l'origine à $\partial\Omega$, à savoir de solutions de (3.1) telles que $|q(t)| + |\dot{q}(t)| \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ et $q(t) \to \xi \in \partial\Omega$, $|\dot{q}(t)| \to 0$ lorsque $t \to -\infty$. Sans (V3), nous arrivons à déterminer une classe de potentiels pour lesquels de telles solutions existent. Nous montrons aussi, sous des conditions faibles sur V, qu'il existe toujours une solution homocline ou hétérocline (même s'il n'est pas toujours possible de les distinguer). Soit $\rho(x)$ la distance de x à $\partial\Omega$. Nos principaux résultats sont les suivants.

Proposition : Sous les hypothèses (V1),(V2) et s'il existe $\alpha \geq 1$, $D > 0$ et $\delta > 0$ tels que, pour tout $x \in S_\delta := \{x \in \Omega, \ \rho(x) \leq \delta\}$ on a $V(x) \leq -D \ |\rho(x)|^\alpha$. Alors,

(1) Si $\alpha < \frac{3}{2}$, il existe une solution homocline de (3.1) joignant l'origine à $\partial\Omega$.

(2) Si V est C^2, $V' = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\alpha < 4$, il existe une solution hétérocline de (3.1) qui joint l'origine à $\partial\Omega$.

(3) Si $\alpha < 3$, il existe au moins une solution homocline ou une solution hétérocline de (3.1) joignant l'origine et touchant (ou terminant sur) $\partial\Omega$.

Dans [6], en considérant aussi des cas où Ω est non borné nous améliorons un résultat de Caldiroli [Ca] (déjà une extension de [RT]). Nous donnons aussi des résultats d'existence pour diverses orbites connectantes qui étendent certains résultats de Rabinowitz [R3] et Kozlov [K].

Un version légérement affaiblie du résultat de [RT] a été obtenue indépendamment par Ambrosetti et Bertotti [ABe]. En plus de (V1)-(V3), une condition de non dégénérescence sur V autour de zéro est requise. Il est alors possible de trouver une orbite homocline comme point critique de I définie sur $H^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^N)$. La fonctionnelle I a une *géométrie de col* et il est naturel de chercher un point critique au niveau du col. On est alors confronté à l'absence d'estimations à priori sur les suites PS de I. De telles estimations sont présentes dans [R4] à cause de la condition de superquadraticité (SQC). Pour surmonter cette difficulté, Ambrosetti et Bertotti utilisent une procédure d'approximation. En gros, ils obtiennent une homocline comme limite d'une suite de solutions de (3.1) posée sur les intervalles $[-n, n] \subset \mathbf{R}$. Le point central de leur approche est de montrer que cette suite est bornée. Pour cela, ils utilisent une idée de Struwe, connue sous le nom de "monotonicity trick" (voir II, 9 dans [Str3]). Une idée semblable avait déjà été utilisée par Ambrosetti et Struwe [AS] sur un problème de vortex. Dans son application, le fait que V est autonome est utilisé de manière essentielle.

Comme nous l'avons déjà dit les hypothèses sur V dans [RT, ABe] sont beaucoup plus faibles que dans [R4]. Il est alors naturel de se demander si (SQC) est réellement nécessaire quand $V(t, x)$ est périodique (ou plus généralement non autonome).

Mon travail [7], avec F. Giannoni et K. Tanaka, fournit une réponse partielle à cette question. Dans le cadre plus général d'une variété riemannienne non compacte, on remplace (SQC) par une condition plus faible (voir [7] pour un énoncé précis). Notre preuve, assez technique, est basée sur une procédure d'approximation similaire à celle de [ABe]. Un soin particulier est nécessaire pour choisir la suite approximante et pour cela nous utilisons un résultat de localisation pour les suites de PS qui est une conséquence du principe d'Ekeland. Soit I une fonctionnelle possèdant une géométrie de col et dont l'ensemble des chemins et la valeur minimax sont notés respectivement Γ et c, alors pour toute suite de chemins $\{\gamma_n\}$ où $\max_{t\in[0,1]} I(\gamma_n(t)) \to c$, il existe une suite PS, $\{u_n\}$ telle que $\min_{t\in[0,1]} ||u_n - \gamma_n(t)|| \to 0$ lorsque $n \to \infty$ (voir par exemple [G]). Notre généralisation de (SQC) peut paraitre modeste, spécialement au vu de la technicité des conditions qui la remplace, mais la difficulté de s'affranchir de (SQC) dans une approche variationnelle de type col est un point d'accord entre spécialistes. Il n'y a en fait que très peu de travaux où (SQC) est affaiblie. A notre connaissance, le seul résultat comparable, dans le cadre des systèmes hamiltoniens, est dû à Caldiroli et Montecchiari [CM].

Multiplicité d'orbites homoclines : En contraste avec le cas d'une seule orbite homocline la dépendance temporelle de V est plutôt un avantage pour obtenir des résultats de multiplicité, et en particulier l'existence d'une infinité d'orbites homoclines. Le théorème classique de Smale-Birkhoff donne une description complète de la dynamique du système en présence d'un point homocline transverse à un point d'équilibre hyperbolique. Le principal outil pour s'assurer de cette condition de transversalité est la théorie de Melnikov [M] qui fonctionne principalement lorsqu'une perturbation périodique est ajoutée à un système autonome. Récemment, en introduisant un nouveau principe minimax, Séré a montré l'existence d'une infinité d'orbites homoclines [Se1] pour le système introduit dans [CES]. Son approche a été utilisée par Coti-Zelati et Rabinowitz [CR] pour établir le même résultat de multiplicité pour des systèmes du second ordre comme (3.1). Ensuite dans [Se2], Séré a montré que les méthodes variationnelles peuvent être utilisées pour prouver des résultats de type "shadowing" (voir [A]), et donc l'existence d'une classe (infinie) de solutions, appelées solutions *multibumps*, dont la présence révèle un comportement de type chaotique du système. Si l'ensemble des solutions homoclines est dénombrable alors, le système admet des solutions *multibumps*. Cette condition est plus faible que la condition classique de transversalité. Les idées de Séré ont déjà inspiré nombre de travaux dans lesquels des conditions de nondégénérescence sur l'ensemble des orbites homoclines, plus faibles que dans [Se2] sont introduites (voir par exemple [Bes, MNT]). Il est aussi maintenant possible de traiter des cas où la dépendance temporelle est plus générale, par exemple asymptotiquement périodique ou presque périodique. Cependant la condition introduite par Séré et ses généralisations ne sont jamais satisfaites si V est autonome.

Dans le cas autonome, pour des potentiels réguliers, nous connaissons seulement deux résultats de multiplicité. Dans [AC] et [Tan3], en utilisant la théorie de la catégorie de Ljusternik-Schnirelmann, deux homoclines sont obtenues pour un système du type (3.1). Il est nécessaire pour cela de supposer que le potentiel est une perturbation d'une fonction à symétrie radiale. Le cas où V est autonome mais singulier est généralement plus simple. La topologie plus riche de l'espace des configurations permet d'obtenir des résultats de multiplicité (voir par exemple [Tan1]). Ainsi, dans [9] et [11] je considère l'équation

$$\ddot{u}(t) + \nabla V(u(t)) = 0, \tag{3.2}$$

où le potentiel V est singulier sur un ensemble $S \subset \mathbf{R}^N$ et C^1 sur $\mathbf{R}^N \setminus S$; on suppose

(U1) $V(0) = 0 > V(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N \backslash S$

(U2) $-V(x)|x|^2 \to +\infty$ lorsque $|x| \to \infty$

(U3) $V(x) \to -\infty$ lorsque $d(x,S) \to 0$

(U4) il existe un voisinage N de S et une fonction $W \in C^1(N \setminus S, \mathbf{R})$, tels que

$$W(x) \to -\infty \text{ lorsque } d(x,S) \to 0 \text{ et } |\nabla W(x)|^2 \leq -V(x) \text{ pour tout } \quad x \in N \setminus S.$$

Sous ces hypothèses, $x = 0$ est un point d'équilibre instable et l'unique maximum global de V. Nous ne faisons pas d'hypothèses sur le comportement de V dans un voisinage de zéro. Comme dans [6,7] on cherche des orbites homoclines à zéro. Deux orbites homoclines sont dites distinctes s'il n'existe pas de translation temporelle les transformant l'une en l'autre. Soit $E \subset C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^N)$ l'espace

$$E := \{\, u \in H^1_{loc}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^2) \ ; \ \int_{\mathbf{R}} |\dot{u}|^2 \, dt < \infty \,\}$$

muni de la norme hilbertienne

$$\|u\|^2 := |u(0)|^2 + \int_{\mathbf{R}} |\dot{u}|^2 \, dt.$$

Sur E on définit la fonctionnelle de Lagrange

$$\varphi(u) = \int_{\mathbf{R}} (\frac{1}{2}|\dot{u}|^2 - V(u)) \, dt.$$

Les points critiques de φ correspondent à des solutions faibles de (3.2). Aussi, une conséquence de (U1)-(U4) est que si $\varphi(u) < +\infty$ alors u appartient à l'ensemble

$$\Lambda := \{\, u \in E \ ; \ u(t) \in \mathbf{R}^N \backslash S, \ \forall\, t \in \mathbf{R} \text{ et } u(-\infty) = u(+\infty) = 0\}.$$

A partir de maintenant [9] et [11] différent. Dans [9], en collaboration avec M.L. Bertotti, on suppose que S est un fermé non vide de $\mathbf{R}^N$ ($N \geq 2$), non nécessairement borné, tel que $\mathbf{R}^N \backslash S$ soit connexe par arcs et le groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{R}^N \setminus S)$ soit non trivial. Notre résultat principal est :

Théorème 3.1 *Si (U1)-(U4) sont satisfaites et si S est comme ci-dessus alors il existe au moins k solutions homoclines distinctes de (3.2) où k est le rang de $\pi_1(\mathbf{R}^N \setminus S)$.*

Le groupe $G := \pi_1(\mathbf{R}^N \setminus S)$ s'identifie avec l'ensemble des classes d'homotopies des courbes $u \in \Lambda$. Nos solutions homoclines sont obtenues comme minima locaux de φ dans certaines classes d'homotopies. Toujours à cause de la non inclusion de E dans $L^\infty(\mathbf{R}^N)$, on ne doit pas s'attendre, à ce qu'il y ait un minimum dans chaque classe d'homotopie. Néanmoins, à travers l'étude des suites minimisantes, on détermine un ensemble de générateurs du groupe G pour lequel il existe un minimum. L'utilisation d'un tel ensemble de générateurs a été introduite par Bolotin et Kozlov [BK] et a déjà été utilisée dans différents contextes (voir par exemple [Bo, BB]). L'application que nous en faisons ici est nouvelle, en particulier parce que notre résultat s'applique même si S est non borné et qu'il n'y a aucune condition sur le comportement de V autour de 0. Notre preuve utilise quelques éléments de topologie algébrique et repose sur la complétude de la métrique de Maupertuis-Jacobi correspondant à la valeur zéro de l'énergie totale $F : (\mathbf{R}^N \setminus S) \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, $F(x, v) = \sqrt{-2V(x)}\,|v|$. Cette complétude, assurée par les conditions de compacité (U2) et (U4), est cruciale pour définir l'ensemble des générateurs.

Dans l'article [11], en collaboration avec P. Caldiroli, l'équation (3.2) est posée dans $\mathbf{R}^2$. Nous supposons toujours (U1)-(U4), mais maintenant S est réduit à un point de ξ de $\mathbf{R}^2$. Avec les même définitions de E, Λ et φ, on pose pour chaque $k \in \mathbf{N}$

$$\Lambda_k := \{\, u \in \Lambda \ ; \ \mathrm{ind}_\xi\, u = k \,\} \ \text{ et } \ \lambda_k := \inf \{\, \varphi(u) \ ; \ u \in \Lambda_k \,\}.$$

Ici ind_ξ est l'indice de u autour de ξ. Il est bien défini car toute fonction $u \in \Lambda$ décrit une courbe fermée dans $\mathbf{R}^2$ d'origine et d'extrémité 0 qui ne pénètre pas la singularité.

Il est facile de voir qu'un minimum de φ restreint à Λ_k est une solution homocline de (3.2) et trivialement des homoclines associées à différentes valeurs de k sont géométriquement distinctes. Un premier objectif de notre travail est d'étudier l'existence, pour k donné, d'un minimum de φ sur Λ_k. Dans cette direction nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.2 *Si on suppose que $V \in C^{1,1}(\mathbf{R}^2 \setminus \{\xi\}, \mathbf{R})$ satisfait (U1)–(U4) et si on pose $\bar{k} = \sup \{\, k \in \mathbf{N} \ ; \ \lambda_k = k\lambda_1 \,\}$. Alors :*

(i) $\bar{k} < \infty$ si et seulement si la condition suivante $(*)$ est vérifiée :

il existe $T \in (0, \infty)$ et $u \in H^1([0,T], \mathbf{R}^2)$ tels que $u(0) = u(T)$, $u(t) \neq \xi$ pour tout $t \in [0,T]$, $\mathrm{ind}_\xi\, u = 1$ et $\int_0^T (\frac{1}{2}|\dot{u}|^2 - V(u))\, dt < \lambda_1$.

(ii) Si $\bar{k} < \infty$ alors pour tout $k > \bar{k}$ il existe $v_k \in \Lambda_k$ telle que $\varphi(v_k) = \lambda_k$. De plus v_k est une solution homocline de (3.2).

(iii) Si $\bar{k} > 2$ alors pour $1 < k < \bar{k}$, $\varphi(u) > \lambda_k$ pour tout $u \in \Lambda_k$.

Le Théorème 3.2 améliore des résultats de [R7] et [CN]. Sous les hypothèses du Théorème 3.2, Rabinowitz montre dans [R7], que la valeur λ_1 correspond à un minimum de φ dans Λ_1 et que si la condition $(*)$ est satisfaite, il existe en plus de v_1, une autre orbite homocline $v \in \Lambda$, obtenue comme minimum de φ dans $\Lambda_{\bar{k}+1}$. Ici nous généralisons son résultat en montrant que $(*)$ est aussi nécessaire pour obtenir un minimum de φ dans Λ_k pour un $k > 1$ et que l'existence d'un minimum de φ dans Λ_k pour un $k > 1$ implique l'existence d'une infinité d'orbites homoclines distinctes. Dans [CN] une infinité d'homoclines était déjà obtenue sous des hypothèses plus fortes avec une approche différente.

Pour prouver le Théorème 3.2, on commence par donner une description précise des suites contenues dans les niveaux d'énergie finies de la fonctionnelle φ et en particulier, en fixant k, des suites minimisantes de φ par rapport à Λ_k . Ensuite, on observe que si la valeur λ_k est atteinte par un $v_k \in \Lambda_k$ pour un $k > 1$, les suites minimisantes de φ par rapport à Λ_{k+1} sont, à une translation près, convergentes. La valeur λ_{k+1} est donc aussi atteinte par φ sur Λ_{k+1} et un processus récursif peut-être amorcé. Le point clef qui assure la compacité au niveau λ_{k+1} est l'observation que, grâce à la géométrie planaire de l'espace de configuration, l'homocline v_k admet une sous-courbe u_k entourant ξ, définie par la restriction de v_k à un intervalle compact approprié I_k, et telle que $\int_{I_k}(\frac{1}{2}|\dot{u}_k|^2 - V(v_k))\,dt < \frac{\lambda_k}{k}$. La condition $(*)$ est nécessaire et suffisante pour initier ce processus (en $k = \bar{k}+1$). A la fin de [11] (voir aussi [CN]), on donne quelques exemples de conditions sur V qui garantissent que $(*)$ est satisfaite et que $\bar{k} = 1$.

Nous analysons ensuite le comportement des sous-courbes u_k et montrons qu'une sous suite de $\{u_k\}$ converge dans la topologie C^1 vers une solution périodique $\bar{u}$ d'énergie zéro. Cela suggère de chercher des orbites hétéroclines entre 0 et $\bar{u}$, i.e., des solutions de (3.2) dont l'ensemble α-limite est 0 (dans l'espace des phases) et dont l'ensemble ω–limite est $\{(\bar{u}(t), \dot{\bar{u}}(t)) \,:\, t \in \mathbf{R}\}$. Rappelons que les ensembles α–limite $L_\alpha(v)$ et ω–limite $L_\omega(v)$ d'une solution v de (3.2) sont définis par

$$L_\alpha(v) = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^4\,;\, \exists\,(t_n) \subset \mathbf{R} \text{ avec } t_n \to -\infty \text{ et } (v(t_n), \dot{v}(t_n)) \to (x,y)\,\}$$

$$L_\omega(v) = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^4\,;\, \exists\,(t_n) \subset \mathbf{R} \text{ avec } t_n \to +\infty \text{ et } (v(t_n), \dot{v}(t_n)) \to (x,y)\,\}.$$

Le deuxième résultat majeur de [11] est qu'une telle hétérocline existe et peut-être obtenue comme limite, dans la topologie C^1_{loc}, de la suite de solutions v_k trouvée au Théorème 3.2. (voir Th. 1.2 de [11] pour une formulation précise). La démonstration conduit à l'obtention de plusieurs propriétés géométriques des minimiseurs de φ sur Λ_k, $k \in \mathbf{N}$, en combinant la caractérisation variationnelle de ces solutions avec le principe d'unicité de Cauchy.

Il existe peu de travaux sur l'existence d'orbites hétéroclines par des méthodes variationnelles. Les premiers résultats sont dû à Rabinowitz, ([R3]), qui obtient, par une procédure de minimisation, des solutions hétéroclines entre des maxima absolus isolés pour un potentiel régulier autonome, périodique spacialement. Ce résultat a été généralisé par Felmer [F] pour des systèmes hamiltoniens du premier ordre périodique spacialement. Des résultats plus récents sont contenu dans [R5] et [R6].

Notons que quelques unes des estimations obtenues dans [11] jouent un rôle important dans un travail récent de Rabinowitz [R8] ainsi que dans ceux de Bolotin et Rabinowitz [BR1, BR2]. Dans [CD] la restriction que (3.2) est posée dans $\mathbf{R}^2$ est remplacée par une condition appropriée sur l'ensemble S. Des arguments de [9] sont utilisés dans cet article. Finalement mentionnons que Bolotin et Negrini [BNe] ont obtenu indépendamment des résultats voisins de ceux de [11] par des techniques et résultats de géométrie riemannienne.

4 Quelques problèmes elliptiques : [8,10,16]

Dans cette section je présente trois résultats de type elliptique. Dans le premier j'étudie l'existence de solutions de norme prescrite dans un problème aux valeurs propres non linéaire. Pour ce faire, je développe une approche générale à l'existence de suites de Palais-Smale bornées dans des problèmes autonomes. Le second résultat contribue à l'étude de la multiplicité des solutions positives pour une équation non homogène elliptique posée sur $\mathbf{R}^N$. Finalement le troisième est le début d'un travail intensif autour de l'équation d'Allen-Cahn.

Solutions de normes prescrites : Je considère dans [8] un problème aux valeurs propres non linéaire de la forme

$$-\Delta u(x) - \sum_{i=1}^{m} a_i |u(x)|^{\sigma\tilde{N}i} u(x) = \lambda u(x),\ \lambda \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}^N \tag{4.1}$$

avec pour $1 \leq i \leq m$, $a_i > 0$ et $0 < \sigma_i < \frac{4}{N-2}$ si $N \geq 3$, $\sigma_i > 0$ si $N = 1, 2$.

Le problème de l'existence de solutions pour (4.1), lorsque $\lambda < 0$ est fixé, a été résolu par les travaux de Berestycki et Lions [BL1, BL2]. Nous considérons ici la question différente de trouver des solutions normalisées, c'est à dire des solutions qui satisfont une condition du type $\int_{\mathbf{R}^N} |u(x)|^2 dx = 1$. Ces solutions présentent un intérêt pour les physiciens, car (4.1) est liée à la recherche de certains types de solutions stationnaires dans des équations de Klein-Gordon ou de Schrödinger (voir [BL1]). Plus précisement nous considérons, pour chaque valeur de $c > 0$ fixée, le problème suivant :

$(P)_c$ Trouver un couple $(u_c, \lambda_c) \in H^1(\mathbf{R}^N) \times \mathbf{R}$ satisfaisant (4.1) avec $||u_c||_{L^2(\mathbf{R}^N)} = c$.

Ce problème a déjà été étudié par Stuart (voir [Stu1, Stu4]). Ses résultats couvrent des non-linéarités plus générales que dans (4.1). Pour (4.1), il montre que si $0 < \sigma_i < \frac{4}{N}$ pour $1 \leq i \leq m$, alors $(P)_c$ a une solution pour tout $c > 0$. Définissons $F : H^1(\mathbf{R}^N) \to \mathbf{R}$ par

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx - \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{\sigma_i + 2} \int_{\mathbf{R}^N} |u(x)|^{\sigma_i + 2} dx.$$

Il est bien connu que si $u_c \in H^1(\mathbf{R}^N)$ est un point critique de F sous la contrainte

$$u \in S(c) := \{v \in H^1(\mathbf{R}^N)\ ;\ ||v||_{L^2(\mathbf{R}^N)} = c\},$$

alors il existe un multiplicateur de Lagrange λ_c tel que (u_c, λ_c) satisfait (4.1). Sous la condition $0 < \sigma_i < \frac{4}{N}$ pour $1 \leq i \leq m$, Stuart montre que

$$\inf_{u \in S(c)} F(u) > -\infty$$

et il obtient un point critique en prouvant que l'infimum est atteint (voir [Stu1, Stu4]). Dans [8] nous étendons ce résultat en montrant que $(P)_c$ a une solution pour tout $c > 0$, si pour tout $1 \leq i \leq m$,

$$\frac{4}{N} < \sigma_i < \frac{4}{N-2} \text{ si } N \geq 3 \text{ et } \sigma_i > \frac{4}{N} \text{ si } N = 1, 2$$

(dans le cas où la non-linéarité est de la forme $|u|^{\frac{4}{N}} u$ le problème $(P)_c$ est ouvert). Ce résultat s'obtient encore en cherchant un point critique de F sur $S(c)$, mais la procédure variationnelle est maintenant plus complexe. Le fait de passer de $\sigma_i < \frac{4}{N}$ à $\sigma_i > \frac{4}{N}$ modifie complètement la géométrie de la fonctionnelle. Nous avons maintenant

$$\inf_{u \in S(c)} F(u) = -\infty$$

et donc il n'y a pas de minimum global. Nous montrons que F a une *géométrie de col* sur $S(c)$ c'est à dire qu'il existe $u_1, u_2 \in S(c)$ tels que si

$$\Gamma(c) := \{g \in C([0,1], S(c)) \ ; \ g(0) = u_1, g(1) = u_2\}$$

nous avons

$$\gamma(c) := \inf_{g \in \Gamma(c)} \max_{s \in [0,1]} F(g(s)) > \max\{F(u_1), F(u_2)\}.$$

Ce résultat qui est obtenu en utilisant une inégalité de type Gagliardo-Sobolev et le caractère autonome de (4.1) est à notre connaissance le seul exemple dans la littérature, de fonctionnelle, dont on montre qu'elle possède une *géométrie de col* sur une contrainte.

Le principe d'Ekeland garantit l'existence d'une suite PS, $\{v_n\} \subset S(c)$ telle que, si $n \to \infty$,

$$F(v_n) \to \gamma(c) \quad \text{et} \quad F'_{|S(c)}(v_n) \to 0. \tag{4.2}$$

Si $v_n \to v_c$ pour un $v_c \in H^1(\mathbf{R}^N)$, $(P)_c$ est résolu. Une première étape pour obtenir la convergence est de prouver que $\{v_n\}$ est bornée. Une fois de plus nous sommes confronté à l'absence d'estimations à priori sur les suites PS. Nous rappellons qu'une difficulté identique avait été surmontée dans [ABe] en utilisant le "monotonicity trick" de Struwe. Il n'est pas clair que cette idée peut s'appliquer ici et de long calculs seraient de toute facon nécessaires. Nous proposons dans [8] une approche nouvelle qui repose sur l'introduction de la fonctionnelle auxiliaire $\tilde{F} : H^1(\mathbf{R}^N) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\tilde{F}(u,s) = \frac{e^{2s}}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{e^{sN}} \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{\sigma_i + 2} \int_{\mathbf{R}^N} |e^{\frac{sN}{2}} u(x)|^{\sigma_i + 2} dx.$$

Sur la contrainte élargie $S(c) \times \mathbf{R}$, $\tilde{F}$ a la même géométrie que F. En effet pour les u_1, u_2 précédemment introduit, si

$$\tilde{\Gamma}(c) := \{h \in C([0,1], S(c) \times \mathbf{R}) \ ; \ h(0) = (u_1, 0), h(1) = (u_2, 0)\}$$

on a

$$\gamma(c) = \tilde{\gamma}(c) := \inf_{h \in \tilde{\Gamma}(c)} \max_{t \in [0,1]} \tilde{F}(h(t)) > \max\{\tilde{F}(u_1, 0), \tilde{F}(u_2, 0)\}.$$

Maintenant en appliquant sur $\tilde{F}$ le principe de localisation utilisé dans [7] on construit pour F, une suite bornée $\{u_n\} \subset S(c)$ satisfaisant (4.2).

L'introduction de $\tilde{F}$ permet d'incorporer dans la procédure variationnelle l'information que toutes les solutions faibles de (4.1) satisfont l'identité de Pohozaev. Plus généralement, dans un problème autonome, cette méthode permet de bénéficier de contraintes "naturelles"; par exemple, la conservation de l'énergie que toute solution homocline doit vérifier dans [ABe]. Notre approche peut être utilisée pour retrouver, simplement, les résultats de [AS] et [ABe] et les résultats d'existence de [BL1] directement par une approche de col.

On peut supposer que $u_n \rightharpoonup u_c$ pour un $u_c \in H^1(\mathbf{R}^N)$ mais on veut montrer que $u_n \to u_c$. Lorsque $N \geq 2$ le manque de compacité de (4.1) est surmonté en travaillant dans le sous-espace des fonctions à symétrie radiale où il est bien connu (voir [Stra]) que l'on récupère de la compacité. Lorsque $N = 1$ une autre preuve est nécessaire. Nous combinons l'identité de Pohozaev avec des idées de [Bu] relatives à la description par Lions [L2] des suites PS (voir (4.7)). Finalement, ayant obtenu une solution (λ_c, u_c) pour tout $c > 0$, on étudie son comportement comme fonction de $c > 0$. On montre que si $c \to 0$,

$$||\nabla u_c||_{L^2(\mathbf{R}^N)} \to +\infty \text{ et } \lambda_c \to -\infty.$$

De plus, lorsque $c \to +\infty$

$$||\nabla u_c||_{L^2(\mathbf{R}^N)} \to 0 \text{ et } \lambda_c \to 0.$$

Ces résultats complètent la théorie de la bifurcation depuis l'infimum du spectre essentiel (voir en particulier [Stu2, Stu3]).

Deux solutions positives pour une équation non homogène sur $\mathbf{R}^N$: L'article [10] étudie l'existence de solutions positives $u \in H^1(\mathbf{R}^N)$ pour l'équation

$$-\Delta u(x) + u(x) = f(x, u(x)) + h(x), \ x \in \mathbf{R}^N, \ N \geq 3 \tag{4.3}$$

où l'on suppose que :

(H0) $h \in H^{-1}(\mathbf{R}^N)$ et $0 \not\equiv h$;

(H1) $f : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfait les conditions de Carathéodory;

(H2) il existe $a > 0$, $b \in [0, 1[$ et $2 < p < \frac{2N}{N-2}$ tels que pour $t \in \mathbf{R}$

$$|f(x,t)| \leq a|t|^{p-1} + b|t|, \ p.p. \text{ en } \ x \in \mathbf{R}^N;$$

(H3) il existe $\mu > 2$, $\bar{b} \in [0, 1[$ tels que, en posant $\bar{f}(x,t) = f(x,t) - \bar{b}t$, on a pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$ et $\forall t \neq 0$

$$0 < \mu \bar{F}(x,t) \leq \bar{f}(x,t)t \ \text{ avec } \bar{F}(x,t) = \int_0^t \bar{f}(x,s)ds;$$

(H4) il existe $\tilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$(i) \lim_{|x|\to\infty} f(x,t) = \tilde{f}(t) \ \text{ et } \ (ii) \ f(x,t) \geq \tilde{f}(t), \ \ p.p. \text{ en } \ x \in \mathbf{R}^N.$$

On munit $H := H^1(\mathbf{R}^N)$ de la norme standard $||u||^2 = ||\nabla u||_2^2 + ||u||_2^2$. On définit

$$||h||_{H^{-1}} = \sup\{\int_{\mathbf{R}^N} hu \ ; \ ||u|| = 1\} \ \text{ et } \ S = \inf\{||u||^2 \ ; \ ||u||_p = 1\}.$$

Notre résultat principal s'énonce comme suit :

Théorème 4.1 *On suppose (H0)-(H4), $h \geq 0$ et*

$$||h||_{H^{-1}} < \tilde{c} S^{\frac{p}{2(p-2)}} \quad \text{où} \quad \tilde{c} = a^{-\frac{1}{p-2}}(p-1)^{-\frac{p-1}{p-2}}(p-2)(1-b)^{\frac{p-1}{p-2}} \ S^{\frac{p}{2(p-2)}}. \tag{4.4}$$

Alors (4.3) possède deux solutions positives.

Mentionnons que (4.3) n'a pas de solution positive lorsque $h \geq 0$ et $||h||_{H^{-1}}$ est grand (voir [CZ]). Nos deux solutions sont obtenues comme points critiques de la fonctionnelle I définie sur H par

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 + u^2 - \int_{\mathbf{R}^N} F(x, u) - \int_{\mathbf{R}^N} hu$$

où $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$. Comme on cherche des solutions positives, on pose $f(x, t) = 0$, p.p. $x \in \mathbf{R}^N$ pour $t \leq 0$. Alors, quand $h \geq 0$, tout point critique u de I satisfait $u \geq 0$. Par conséquent, pour obtenir le théorème, la partie difficile est d'obtenir deux points critiques. Pour ce faire on doit surmonter un manque de compacité et la structure dégénérée de l'ensemble $M := \{u \in H \ ; \ I'(u)u = 0\}$ qui contient les points critiques.

Le problème d'obtenir deux solutions de (4.3) avait déjà été étudié dans une série d'articles [CZ, Zhu, ZZ]. Il est très lié au travail de Tarantello [Ta] qui obtient deux solutions pour le problème de Dirichlet

$$-\Delta u = |u|^{p-2} u + h \tag{4.5}$$

posé sur un domaine borné régulier $\Omega \subset \mathbf{R}^N, N \geq 3$ avec $p = \frac{2N}{N-2}$. Ici le manque de compacité vient du choix particulier de p, qui donne lieu à un problème dit d'exposant critique de Sobolev (voir [BN1]). Il y a bien sûr beaucoup d'autres exemples dans la littérature où deux solutions, correspondant l'une à un minimum local et l'autre à un point selle, sont obtenues. Concernant (4.3) les résultats les meilleurs étaient jusqu'ici dûs à Cao et Zhou [CZ]. Comme dans le Théorème 4.1, ils obtiennent deux solutions positives, mais outre (H0)-(H4) ils supposent que

$$f(x, .) \in C^2]0, +\infty[\ \text{ et } \ \frac{\partial^2}{\partial^2 t} f(x, t) \geq 0, \ \forall x \in \mathbf{R}^N, \ \forall t \geq 0$$

ainsi qu'une condition plus forte sur h. Cao et Zhou étudient d'abord le cas limite $f(x, t) = a|t|^{p-2}t + bt$. Pour cette non-linéarité ils obtiennent une solution positive de (4.3) comme minimum de I sous la contrainte M. Comme dans le cas général $f(x, t) \leq a|t|^{p-2}t +$

bt, $\forall t \geq 0$, c'est une sur-solution de (4.3). Cela leur permet, en utilisant une méthode de sur et sous-solutions, d'obtenir une solution positive minimale u_0 de (4.3). Ils prouvent que u_0 est un minimum local de I (à ce point la convexité de $f(x, \cdot)$ est nécessaire) et en utilisant un lemme du col autour de u_0 ils obtiennent une deuxième solution.

Pour établir le Théorème 4.1 on développe une approche purement variationnelle. La première solution est obtenue directement comme minimum local de I. On explicite une variété Λ, homéomorphe à la sphère unité de H, qui décompose H en deux composantes connexes U_1 et U_2 :

$$H \setminus \Lambda = U_1 \cup U_2 \ \text{ et } 0 \in U_1.$$

et pour laquelle, si (4.4) est satisfaite,

$$-\infty < c_0 := \inf_{u \in U_1} I(u) < \inf_{u \in \Lambda} I(u) := c_1. \tag{4.6}$$

La définition de Λ est introduite en étudiant le cas limite $f(x,t) = a|t|^{p-2}t + bt$. La variété est décrite par la fonctionnelle $g : H \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(u) = ||\nabla u||_2^2 + (1-b)||u||_2^2 - a(p-1)||u||_p^p,$$

en ce sens que $g > 0$ sur $U_1 \backslash \{0\}$, $g = 0$ sur $\Lambda \cup \{0\}$ et $g < 0$ sur U_2. Le fait que pour la variété Λ, (4.6) reste vraie pour un f général est une conséquence de la condition (H2). On obtient le premier point critique comme minimum de I sur l'ensemble ouvert U_1. L'introduction de Λ et du problème de minimisation associé constitue une extension importante de l'approche de Tarantello, qui obtient tout d'abord un minimum de I restreint à M et prouve ensuite que c'est un point critique libre de I. Pour cette dernière étape M ne doit pas être dégénérée, ce qui est vrai à cause de l'homogénéité de $|u|^{p-2}u$.

Par le principe d'Ekeland, on est assuré de l'existence d'une suite minimisante $\{u_n\} \subset U_1$ telle que $I(u_n) \to c_0$ et $I'(u_n) \to 0$. On voit facilement que $u_n \rightharpoonup u_0$ dans H avec $I'(u_0) = 0$. En particulier u_0 est une solution de (4.3). Pour trouver une deuxième solution, le point crucial est de montrer que $u_0 \in U_1$. En effet il existe un $v \in U_2$ tel que $I(v) < c_1$ et alors par (4.6) si $u_0 \in U_1$, I possède, une *géométrie de col* entre les points u_0 et v. Malgré le manque de compacité, des estimations précises sur la valeur du col rendent possible l'obtention d'un second point critique et donc du Théorème 4.1. Pour montrer que $u_0 \in U_1$ on utilise la méthode suivante : $\{u_n\} \subset U_1$ étant une suite PS on sait qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ et $\{x_n^i\} \subset \mathbf{R}^N$, $u^i \in H$ pour $1 \leq i \leq m$ tels que

$$u_n \to u_0 + \sum_{i=1}^{m} u^i(\cdot - x_n^i) \ \text{ dans } H \tag{4.7}$$

où les u^i sont tels que $\tilde{I}'(u^i) = 0$ avec

$$\tilde{I}(u) = \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbf{R}^N} \tilde{F}(u)$$

et $|x_n^i| \to \infty,\ |x_n^i - x_n^j| \to \infty$, pour $1 \le i \neq j \le m$. De plus

$$I(u_n) \to I(u_0) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{I}(u^i). \tag{4.8}$$

(Voir [L2, BC] pour de tels résultats). Clairement si tous les u^i sont nuls dans la somme, $u_n \to u_0$ et donc $u_0 \in U_1$. On voit facilement que $\tilde{I}(u^i) > 0$, lorsque $1 \le i \le m$. Par suite, si on suppose que $u^i \neq 0$, pour un i, on déduit de (4.8) que $u_0 \in U_2$ ou de manière équivalente que $g(u_0) < 0$. On vérifie facilement aussi que $g(u^i) < 0$ lorsque $1 \le i \le m$. Ainsi d'un côté, comme, lorsque $n \to \infty$, la distance des supports de $u_0(\cdot)$ et $u^i(\cdot - x_n^i)$ tend vers l'infini,

$$\lim_{n\to\infty} g(u_0 + \sum_{i=1}^{m} u^i(x - x_n^i)) = g(u_0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} g(u^i(x - x_n^i)) = g(u_0) + \sum_{i=1}^{m} g(u^i) < 0.$$

La deuxième inégalité est une conséquence de l'invariance par translation de g sur $\mathbf{R}^N$. D'un autre côté, puisque $\{u_n\} \subset U_1$ on a $\liminf_{n\to\infty} g(u_n) \ge 0$. Au vu de (4.7) ces deux résultats sont en contradiction et donc $u_0 \in U_1$.

Dans [10], le Théorème 4.1 est complété par le résultat suivant : si (H0)-(H2) sont satisfaites ainsi que (4.4), où l'égalité est permise, alors (4.3) possède, au moins, une solution qui est positive si $h \ge 0$. Dans [Ta] deux solutions de (4.5), pas nécessairement positives, sont obtenues pour tout $h \in H^{-1}(\mathbf{R}^N)$ satisfaisant (4.4). Au vu de ce résultat j'ai conjecturé dans [10] que si on suppose (H0)-(H4), c'est encore vrai pour (4.3). Récemment Ambrosetti et Badiale [AB] ont donnés une réponse partielle à cette conjecture. En utilisant une généralisation de l'approche de Melnikov, ils ont montrés que (4.3) possède deux solutions pour $||h||$ assez petit. C'est cependant un résultat de type perturbatif, aucune borne sur h n'est donnée. Dans le cas général la conjecture est encore ouverte.

Solutions stationnaires sur $\mathbf{R}^2$ pour une équation de type Allen-Cahn : Dans [16], en collaboration avec F. Alessio et P. Montecchiari, on considére une classe d'équations semi-linéaires elliptiques de la forme

$$-\Delta u(x,y) + a(x)W'(u(x,y)) = 0 \text{ pour } (x,y) \in \mathbf{R}^2, \tag{4.9}$$

où l'on suppose que

(H1) a est une fonction continue, strictement positive et périodique de période $T > 0$.

(H2) $W \in C^2(\mathbf{R})$ et $W(s) \ge 0$ pour tout $s \in \mathbf{R}$.

(H3) il existe $m \ge 2$ points $\sigma_1, ..., \sigma_m \in \mathbf{R}$ tels que $W(\sigma_i) = 0$ $(1 \le i \le m)$ et $W(s) > 0$ pour tout $s \in \mathbf{R} \setminus \{\sigma_1, ..., \sigma_m\}$.

(H4) $W''(\sigma_i) > 0$ pour $1 \le i \le m$ et il existe $R_0 > 0$ tel que $W'(s)s \ge 0$ pour tout $|s| \ge R_0$.

En 1978, De Giorgi a conjecturé que si a est une fonction constante, toute solution u de (4.9) satisfaisant les conditions de bord $u(x,y) \to \sigma_i$ si $x \to -\infty$ et $u(x,y) \to \sigma_j$ si $x \to +\infty$ pour tout $y \in \mathbf{R}$ avec $i \neq j$ arbitraires fixés, est unidimensionnelle. Ce résultat a été récemment prouvé par Ghoussoub et Gui [GG]. Le but principal de [16] est de montrer qu'il existe un sous-ensemble dense (par rapport à la norme L^∞), de l'ensemble des fonctions satisfaisant (H1) pour lequel l'équation (4.9) possède de multiple solutions bidimensionnelles. Imposer des conditions de bord appropriées dans la direction y, est la clef de notre résultat. Pour introduire ces conditions discutons d'abord le problème unidimensionnel associé à (4.9),

$$-\ddot{q}(x) + a(x)W'(q(x)) = 0, \ x \in \mathbf{R}. \tag{4.10}$$

Soit

$$F(q) = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2}|\dot{q}(x)|^2 + a(x)W(q(x))\,dx$$

définie sur l'espace

$$E := \{q \in H^1_{loc}(\mathbf{R})\,;\ \int_{\mathbf{R}} |\dot{q}(x)|^2\,dx < +\infty, \int_{\mathbf{R}} W(q(x))\,dx < +\infty\}$$

muni de la norme hilbertienne

$$\|q\|^2 := |q(0)|^2 + \int_{\mathbf{R}} |\dot{q}(x)|^2\,dx.$$

Pour $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ arbitraires fixés, soit

$$\Gamma_{i,j} := \{q \in E\,;\ \lim_{x \to -\infty} q(x) = \sigma_i,\ \lim_{x \to +\infty} q(x) = \sigma_j\}.$$

Posant $c_{i,j} := \inf_{\Gamma_{i,j}} F(q)$, on montre que $c(i) := \min_{j \neq i} c_{i,j} > 0$, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. On choisit un $i \in \{1, \ldots, m\}$ et un $j(i) \in \{1, \ldots, m\}$ correspondant tels que $c(i) = c_{i,j(i)}$.

On montre d'abord qu'il est possible de trouver une solution de (4.10) comme minimum de F sur $\Gamma^i := \Gamma_{i,j(i)}$. L'ensemble (infini) des minima est noté $\mathcal{K}^i := \{q \in \Gamma^i\,;\ F(q) = c(i)\}$.

Pour pouvoir obtenir des solutions bidimensionnelles, on fait l'hypothèse suivante sur l'ensemble $\mathcal{K}^i$:

$(*)_i$ il existe une partie compacte A de $\mathcal{K}^i$ telle qu'en posant $\mathcal{K}^i_0 := A$ et pour $k \in \mathbf{Z}$, $\mathcal{K}^i_k := \{q(\cdot - Tk) \,:\, q \in \mathcal{K}^i_0\}$, ($T$ est la période de a) on a

- (i) $\mathcal{K}^i = \cup_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{K}^i_k$
- (ii) $\exists \alpha > 0$ tel que si $k \neq k'$ alors $\mathrm{dist}(\mathcal{K}^i_k, \mathcal{K}^i_{k'}) \geq \alpha$.

Ici la distance $dist(\mathcal{K}^i_k, \mathcal{K}^i_{k'})$ entre les ensembles $\mathcal{K}^i_k$ et $\mathcal{K}^i_{k'}$ est définie par

$$dist(\mathcal{K}^i_k, \mathcal{K}^i_{k'}) = \inf\{(\int_{\mathbf{R}} |q_1(t) - q_2(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}, q_1 \in \mathcal{K}^i_k, q_2 \in \mathcal{K}^i_{k'}\}.$$

On remarque que l'hypothèse $(*)_i$ ne peut pas être vérifiée si la fonction a est constante (le cas autonome) puisque dans ce cas le problème est invariant sous l'action du groupe continu des translations.

Nous montrons que si $\alpha \geq 0$ est une fonction continue périodique et β une fonction continue, périodique non constante, et si on pose $a(x) = \alpha(x) + \beta(\varepsilon x)$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $(*)_i$ est satisfaite pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Aucune restriction n'est faite sur la norme L^∞ de β. Ce résultat est dans l'esprit de travaux récents sur des systèmes hamiltoniens de second ordre [AM, ACM] où l'on montre que des systèmes ayant un potentiel oscillant lentement dans le temps satisfont automatiquement la condition de non dégénérecence sur l'ensemble des orbites homoclines requise pour construire des solutions *multibump*. En fait, en adaptant un argument de [ACM], on peut montrer que l'ensemble des a pour lequel $(*)_i$ est vraie est aussi ouvert. On obtient ainsi un résultat générique.

En supposant $(*)_i$, on obtient des solutions bidimensionnelles en cherchant, pour $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, une solution de (4.9) appartenant à l'ensemble

$$\mathcal{M}_k^i := \{u \in X^i\,;\, \lim_{y \to -\infty} \operatorname{dist}(u(\cdot, y), \mathcal{K}_0^i) = \lim_{y \to +\infty} \operatorname{dist}(u(\cdot, y), \mathcal{K}_k^i) = 0\}$$

où

$$X^i := \{u \in H^1_{loc}(\mathbf{R}^2)\,;\, u(\cdot, y) \in \Gamma^i \text{ p.p. } y \in \mathbf{R}\}.$$

On introduit la fonctionnelle renormalisée $\varphi : X^i \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\varphi(u) = \int_{\mathbf{R}} (\int_{\mathbf{R}} \tfrac{1}{2} |\nabla u(x, y)|^2 + a(x) W(u(x, y))\, dx - c(i))\, dy.$$

On montre qu'un minimum u de φ sur $\mathcal{M}_k^i$ est une solution classique de (4.9) qui satisfait $u(\cdot, y) \to \sigma_i$ si $x \to -\infty$ et $u(\cdot, y) \to \sigma_{j(i)}$ si $x \to +\infty$, uniformément en $y \in \mathbf{R}$. Il n'est pas surprenant, à cause de possibles dichotomies, que la procédure de minimisation ne puisse être menée à bien pour chaque valeur de k. Néanmoins, reprenant un argument déjà utilisé dans [9], on explicite un ensemble de générateurs $k_1, \ldots, k_l \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ de $\mathbf{Z}$ pour lequel l'infimum de φ sur $\mathcal{M}_{k_\iota}^i$, $1 \leq \iota \leq l$, est atteint.

Soit $\{u_n\}$ une suite minimisante pour φ sur un $\mathcal{M}_{k_\iota}^i$. Une obstruction possible à la convergence de $\{u_n\}$ pourrait être la distorsion (interne) de la suite, à savoir l'existence de $\{y_n^1\}, \{y_n^2\} \subset \mathbf{R}$ telles que

$$dist(u_n(\cdot, y_n^1), u_n(\cdot, y_n^2)) \to \infty \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{4.11}$$

Cependant nous observons que : $\forall r > 0,\ \exists h_r > 0$ tel que, si pour un $u \in X^i$ et $y \in [y_1, y_2]$,

$$\inf_{z \in \mathcal{K}^i} ||u(\cdot, y) - z(\cdot)||_{H^1(\mathbf{R})} \geq r$$

alors

$$\int_{y_1}^{y_2} \tfrac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} |\partial_y u(x, y)|^2\, dx + (F(u(\cdot, y)) - c(i))\, dy \ \geq\ h_r\ d(u(\cdot, y_2), u(\cdot, y_1)). \tag{4.12}$$

Par suite, comme $\mathcal{K}^i$ est une union d'ensembles fermés deux à deux disjoints, si (4.11) est satisfaite, alors nécessairement $\varphi(u_n) \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$, ce qui contredit le caractère mimimisant de $\{u_n\}$. Un point fort de [16] est la généralité de l'approche qui conduit au résultat. En particulier nous montrons que notre problème bidimensionnel peut être vu comme un problème unidimensionnel abstrait. Pour $u \in X^i$, la courbe $u(\cdot, y)$ est identifiée, pour tout $y \in \mathbf{R}$ fixé, à un point et de même l'application $y \to \gamma(y) := u(\cdot, y)$ est assimilée à une courbe. L'estimation (4.12) apparait alors comme le pendant de l'estimation bien connue pour les problèmes à une dimension (voir [R3])

$$\int_s^p \tfrac{1}{2}|\dot{q}(x)|^2 + a(x)W(q(x))\,dx \geq \sqrt{2\mu_r}|q(p) - q(s)|$$

qui est valable pour $q \in E$ satisfaisant $a(x)W(q(x)) \geq \mu_r$, $\forall x \in [s, p]$. Dans notre analogie le terme $F(u(\cdot, y)) - c(i)$ s'interprète comme un potentiel agissant au point $u(\cdot, y)$.

Notre travail a aussi été motivé par un article de Alama, Bronsard et Gui [ABG] où est étudié le système autonome

$$-\Delta U(x, y) + \nabla W(U(x, y)) = 0, \text{ pour } (x, y) \in \mathbf{R}^2, \tag{4.13}$$

avec U est un vecteur à deux composantes. Ce système est considéré dans le cadre du modèle de Allen-Cahn qui décrit des phénomènes de transition de phases. L'équation (4.13) est le terme dominant dans le développement autour d'un point de l'interface séparant les deux phases. L'existence de solutions satisfaisant des conditions de bord distinctes lorsque $y \to \pm\infty$ est interprétée comme une possibilité que le profil de transition varie tangentiellement le long de l'interface. Dans [ABG] une solution satisfaisant des conditions de bord données par des minima du problème unidimensionel associé est aussi construite. Même si l'équation (4.13) est autonome le résultat de [ABG] n'est pas en contradiction avec la conjecture de De Giorgi ; des fonctions à valeur vectorielle sont considérées par Alama, Bronsard et Gui. A l'opposé de notre approche directe, une procédure d'approximation, à travers des domaines bornés de $\mathbf{R}^2$, est développée dans [ABG]. Elle conduit à des calculs longs qui, nous le pensons, dissimulent les ingrédients clefs qui garantissent l'existence de minima. Puisque (4.13) est autonome le problème de [ABG] peut sembler plus difficile que le nôtre. Cependant la compacité manquante est récupérée par l'addition de conditions fortes sur W, notamment de symétrie.

5 Suites de Palais-Smale bornées : [12,13,14,15]

Dans cette section, on considère une fonctionnelle I qui possède une géométrie de col. On s'intéresse à la question de l'existence d'au moins une suite PS bornée au niveau du col, et on développe une approche générique pour répondre à cette question qui est très liée à celle de l'existence d'un point critique pour I. Cette approche est ensuite appliquée pour trouver une solution d'une EDP posée sur $\mathbf{R}^N$ dont le terme non-linéaire est soit sur-linéaire soit asymptotiquement linéaire à l'infini, et pour obtenir des résultats de bifurcation.

Soit $(X, ||\cdot||)$ un espace de Banach réflexif et $I \in C^1(X, \mathbf{R})$ une fonctionnelle ayant une géométrie de col. Par définition, il existe deux points (v_1, v_2) dans X tels que, si

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X), \gamma(0) = v_1, \gamma(1) = v_2\}$$

on a

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) > \max\{I(v_1), I(v_2)\}.$$

Rappelons que pour une telle fonctionnelle I, le principe d'Ekeland implique l'existence d'une suite PS (de Palais-Smale) pour I au niveau c, à savoir une suite $\{u_n\} \subset X$ telle que $I(u_n) \to c$ et $I'(u_n) \to 0$ dans le dual de X.

La plupart des travaux entrepris pour trouver des conditions sur I garantissant l'existence d'une suite PS bornée, en abrégé une suite BPS, concernent des situations spécifiques. Nous entendons là que des propriétés particulières de l'EDP, ou du système hamiltonien, qui correspond à I sont essentielles pour prouver son existence (comme dans [ABe] ou [8] où le caractère autonome est essentiel). Une approche plus systématique est due à Ghoussoub [G] dont l'idée est de localiser une suite PS autour d'un ensemble dual pour, souvent, conclure qu'elle est bornée. Mentionnons aussi le travail de Cerami [Ce] qui montre qu'il existe une suite (de Cerami), $\{u_n\} \subset X$ satisfaisant $I(u_n) \to c$ et $||I'(u_n)||(1+ ||u_n||) \to 0$ (voir aussi le Th.6, p.140 de [E1]). Souvent il est plus simple de prouver qu'une suite de Cerami est bornée que de le montrer pour une suite PS arbitraire (voir par exemple [BBF]). Cependant, la contribution la plus significative à notre problème est due à Struwe qui a introduit une technique générale, pour obtenir une suite BPS, connue sous le nom de “monotonicity trick”(voir [Str1, Str2] et Ch. II, Sec. 9 de [Str3]). Le résultat que nous donnons ci-dessous est contenu dans [12]. Il poursuit le travail de Struwe en le généralisant et en le simplifiant.

Théorème 5.1 *Soit* $(X, ||\cdot||)$ *un espace de Banach,* $J \subset \mathbf{R}^+$ *un intervalle et* $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ *une famille de fonctionnelles* C^1 *sur* X *de la forme*

$$I_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u), \quad \textit{pour tout } \lambda \in J$$

où $B(u) \geq 0, \forall u \in X$ *et* $B(u) \to +\infty$ *si* $\|u\| \to \infty$. *On suppose qu'il existe deux points* v_1, v_2 *de* X *tels qu'en posant*

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X), \gamma(0) = v_1, \gamma(1) = v_2\}$$

on a, $\forall \lambda \in J$

$$c(\lambda) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > \max\{I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)\}.$$

Alors, pour presque tout $\lambda \in J$*, il existe une suite* $\{v_n\} \subset X$ *telle que*

(i) $\{v_n\}$ *est bornée, (ii)* $I_\lambda(v_n) \to c(\lambda)$*, (iii)* $I'_\lambda(v_n) \to 0$ *dans le dual de* X.

Notons que sous les hypothèses du Théorème 5.1, il peut ne pas exister de suite BPS au niveau $c(\lambda)$ pour certaines valeurs de $\lambda \in J$ (voir [12] pour un exemple dû à Brezis). En plusieurs occasions, Struwe a obtenu des résultats similaires au Théorème 5.1 (voir [ST] pour un exemple récent). Néanmoins ces résultats sont toujours obtenus sur des exemples spécifiques avec des conditions fortes sur la famille $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$.

Pour prouver le Théorème 5.1 on commence par observer que la fonction $\lambda \to c(\lambda)$ est monotone (ici décroissante, puisque $B(u) \geq 0, \forall u \in X$). Donc $c(\lambda)$ est dérivable presque partout et pour prouver le Théorème 5.1 il suffit de montrer que si $c'(\lambda)$ existe, I_λ possède une suite BPS au niveau $c(\lambda)$. Fixons un $\lambda_0 \in J$ où $c'(\lambda_0)$ existe. Soit $\{\lambda_n\} \subset J$ une suite strictement croissante telle que $\lambda_n \to \lambda_0$ et $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ une suite de chemins satisfaisant

$$\max_{t \in [0,1]} I_{\lambda_n}(\gamma_n(t)) \leq c(\lambda_n) + (\lambda_0 - \lambda_n). \tag{5.1}$$

Une telle suite $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ existe puisque Γ est indépendant de λ. Nous prouvons qu'il existe $K = K(\lambda_0) > 0$ tel que

(i) $\|\gamma_n(t)\| \leq K$ si $I_{\lambda_0}(\gamma_n(t)) \geq c(\lambda_0) - (\lambda_0 - \lambda_n)$.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\max\limits_{t \in [0,1]} I_{\lambda_0}(\gamma_n(t)) \leq c(\lambda_0) + \varepsilon$ pour $n \in \mathbf{N}$ assez grand.

Par (ii), $\max_{t \in [0,1]} I_{\lambda_0}(\gamma_n(t)) \to c(\lambda_0)$ et par (i) il existe une boule, centrée à l'origine et dont le rayon $K > 0$ est indépendant de $n \in \mathbf{N}$, qui contient la partie supérieure (par rapport à I_{λ_0}) de chaque chemin γ_n. Par un argument de déformation, on en déduit que pour tout $a > 0$

$$\inf\{\|I'_{\lambda_0}(u)\| \ ; \ u \in X, \ \|u\| \leq K + 1 \text{ et } |I_{\lambda_0}(u) - c(\lambda_0)| \leq a\} = 0.$$

Il suit que I_{λ_0} possède une suite PS au niveau $c(\lambda_0)$, bornée, car contenue dans la boule de rayon $K + 1$ centrée à l'origine.

L'approche de Struwe consiste aussi à montrer que si $c'(\lambda_0)$ existe, I_{λ_0} possède une suite BPS au niveau $c(\lambda_0)$ mais pour ce faire il choisit $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ telle que

$$\max_{t \in [0,1]} I_{\lambda_0}(\gamma_n(t)) \leq c(\lambda_0) + (\lambda_0 - \lambda_n). \tag{5.2}$$

Il développe alors un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas de suite BPS pour I_{λ_0} au niveau $c(\lambda_0)$ et en cherchant une contradiction avec la caractérisation variationnelle de $c(\lambda)$ pour λ proche de λ_0 mais distinct. Pour cela il est conduit à déformer les chemins $\{\gamma_n\}$ avec un "gradient flow" associé à I_{λ_0} sur laquelle l'hypothèse de contradiction est faite. Clairement pour pouvoir faire une déformation adéquate il doit exister une relation étroite entre les gradients de I_λ et de I_{λ_0}. De sévères restrictions techniques sont nécessaires à ce point (voir [ST]). Notre choix de $\{\gamma_n\} \subset \Gamma$ permet d'obtenir un résultat plus général ; le Théorème 5.1 (voir aussi 9.5, Ch. II de [Str3]).

La simplicité de la preuve du Théorème 5.1 a déjà permis d'étendre ce résultat dans deux directions. En collaboration avec J.F. Toland, j'ai éliminé dans [13] l'hypothèse $B(u) \geq 0, \forall u \in X$, qui donne la monotonie sur $c(\lambda)$. Cette généralisation repose sur l'observation que la preuve du Théorème 5.1 peut être adaptée, si on remplace l'existence de $c'(\lambda_0)$ par la condition qu'il existe une suite strictement croissante $\{\lambda_n\} \subset J$ telle que

$$\lambda_n \uparrow \lambda_0 \text{ et } \inf_{n \in \mathbf{N}} \frac{c(\lambda_n) - c(\lambda_0)}{\lambda_n - \lambda_0} > -\infty.$$

Il découle d'un résultat classique dû à Denjoy [Sa, Th. (4.4), p. 270], que l'ensemble des λ_0 pour lesquels cette condition est fausse est de mesure nulle. Dans [13] nous étendons aussi le Théorème 5.1 à une famille $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ plus générale.

Un contrôle de la taille de la suite BPS obtenue dans le Théorème 5.1 est la seconde direction de généralisation. Je montre qu'il est possible de relier le rayon de la boule contenant la suite aux quantités $c(\lambda)$ et $c'(\lambda)$. Ce résultat est directement appliqué à des problèmes de bifurcation dans [14] et [15]. Mentionnons préalablement une conséquence importante du Théorème 5.1 :

Suites de Palais-Smale particulières : On s'intéresse souvent à l'existence d'une suite BPS au niveau du col pour une fonctionnelle donnée, à savoir pour un $\lambda \in J$ donné. Le Théorème 5.1, tout comme la version améliorée de [13], est un outil puissant pour établir l'existence d'une telle suite. C'est en particulier vrai si le problème possède des propriétés de compacité :

Corollaire 5.1 *Soient $(X, ||\cdot||)$ un espace de Banach et $I \in C^1(X, \mathbf{R})$ une fonctionnelle de la forme $I(u) = A(u) - B(u)$ où B et B' sont bornés. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $J = [1-\varepsilon, 1]$, la famille $(I_\lambda)_{\lambda \in J}$ définie par*

$$I_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u)$$

satisfait les hypothèses du Théorème 5.1 et que pour tout $\lambda \in J$ toute suite BPS pour I_λ au niveau $c(\lambda)$ admet une sous-suite convergente. Alors il existe $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset [1-\varepsilon, 1] \times X$ avec $\lambda_n \to 1$ et

$$I_{\lambda_n}(u_n) = c(\lambda_n) \text{ et } I'_{\lambda_n}(u_n) = 0$$

telle que, si $\{u_n\} \subset X$ est bornée, on a,

$$I(u_n) = I_{\lambda_n}(u_n) + (\lambda_n - 1)B(u_n) \to \lim_{n\to\infty} c(\lambda_n) = c(1)$$

$$I'(u_n) = I'_{\lambda_n}(u_n) + (\lambda_n - 1)B'(u_n) \to 0 \text{ dans le dual de } X.$$

Notons que la continuité à gauche de la fonction $\lambda \to c(\lambda)$ est une conséquence de la semi-continuité supérieure de $c(\lambda)$ (vraie sous des hypothèses générales) et de la monotonie.

Le Corollaire 5.1 dit que, si $\{u_n\}$ est bornée, alors c'est une suite BPS pour I au niveau du col. On peut se poser la question de l'intérêt de ce résultat puisque l'existence d'une suite PS pour I au niveau du col était déjà connue (par le principe d'Ekeland) et que le seul problème restant était, comme maintenant, de montrer qu'elle est bornée. Le progrès accompli est le suivant : pour montrer que la suite est bornée, on utilise le fait qu'il s'agit d'une suite de vrais points critiques pour des fonctionnelles proches de I. Le fait que $\{u_n\}$ est une suite de vrais points critiques (plutôt qu'une suite de points presque critiques de I comme dans le cas d'une suite PS standard) fournit souvent des informations supplémentaires qui aident à montrer que $\{u_n\}$ est bornée. Supposons que I soit définie sur un espace de Sobolev et que ses points critiques (comme ceux de I_{λ_n}) correspondent à des solutions d'une EDP. Alors ils possèdent une plus forte régularité que les éléments standards de l'espace ambiant. Aussi une utilisation d'un principe du maximum peut garantir le signe de u_n, $\forall n \in \mathbf{N}$ et il existe parfois des contraintes que u_n doit satisfaire, par exemple une identité de type Pohozaev comme dans [ABe] ou [8]. Plus généralement, pour $\lambda \in \mathbf{R}$, posons

$$K_\lambda := \{u \in X; I_\lambda(u) = c(\lambda) \text{ et } I'_\lambda(u) = 0\}.$$

Si $\cup_{\lambda\in[1-\varepsilon,1]} K_\lambda$ est bornée pour $\varepsilon > 0$ et si pour tout $\lambda \in [1-\varepsilon, 1]$ toute suite BPS pour I_λ au niveau $c(\lambda)$ admet une sous-suite convergente, I possède un point critique.

Dans [12] on utilise une approche dans l'esprit du Corollaire 5.1 pour étudier l'existence de solutions du problème

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta u(x) + K u(x) = f(x, u(x)) \\ u \in H^1(\mathbf{R}^N),\ K > 0. \end{array}\right\} \qquad (P)$$

On cherche des solutions positives, et l'on peut donc supposer que $f(x,s) = 0, \forall s < 0$, p.p. en $x \in \mathbf{R}^N$. On demande à f de satisfaire

(H1) (i) $f : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ est Carathéodory.
(ii) $f(.,s) \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ et $f(.,s)$ est 1-périodique en x_i, $1 \le i \le N$.

(H2) Il existe $p \in]2, \frac{2N}{N-2}[$ si $N \ge 3$ et $p > 2$ si $N = 1,2$ tel que $\lim\limits_{s\to\infty} f(x,s)s^{1-p} = 0$, uniformément pour $x \in \mathbf{R}^N$.

(H3) $f(x,s)s^{-1} \to 0$ uniformément en $x \in \mathbf{R}^N$ quand $s \to 0$.

(H4) Il existe $a \in]0,\infty]$ tel que $f(x,s)s^{-1} \to a$, uniformément en $x \in \mathbf{R}^N$ si $s \to \infty$.

(H5) $f(x,s)s^{-1}$ est une fonction croissante de $s \ge 0$, p.p. en $x \in \mathbf{R}^N$.

On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 5.2 *On suppose que (H1)-(H5) sont satisfaites et que $K \in]0,a[$. Alors il existe une solution positive non triviale de (P).*

Mentionnons que dans [12] le Théorème 5.2 est obtenu sous une condition plus faible que (H5). La plupart des travaux traitant de problèmes du type (P) supposent la condition de superquadraticité, à savoir que pour $F(x,s) := \int_0^s f(x,t)dt$ on a

(SQC) $\quad \exists \mu > 2$ tel que $0 \leq \mu F(x,s) \leq f(x,s)s, \ \forall s \geq 0$, p.p. $x \in \mathbf{R}^N$.

Le Théorème 5.2 couvre les cas $a = \infty$ et $a < \infty$. Un calcul simple montre que (SQC) implique que $f(x,.)$ croit au moins comme $s^{\mu-1}$ lorsque $s \to \infty$. Quand $a < \infty$ il n'est donc pas possible de satisfaire (SQC). Lorsque $a = \infty$ il se peut que (SQC) soit vérifiée mais nos hypothèses sur f ne l'impliquent pas. Par exemple, (SQC) n'est pas satisfaite pour la non-linéarité $f(x,s) = f(s) = s\ln(s+1)$ pour $s \geq 0$. A notre connaissance lorsque $a = \infty$ dans (H4), il n'existe pas de résultat général sur (P) sans supposer la condition (SQC). Lorsque $a < \infty$, mentionnons [SZ1, Zho] qui, antérieurs à [12], traitent de l'existence d'une solution d'un problème de type (P) posé sur $\mathbf{R}$, moyennant des hypothèses sur f plus fortes que (H0)-(H5).

Pour prouver le Théorème 5.2 on insère le problème (P) dans la famille de problèmes

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta u(x) + Ku(x) = \lambda f(x,u(x)) \\ u \in H^1(\mathbf{R}^N), \ K > 0. \end{array}\right\} \qquad (P)_\lambda$$

où $\lambda \in [1,2]$. On associe à $(P)_\lambda$ la famille de fonctionnelles $I_\lambda : H^1(\mathbf{R}^N) \to \mathbf{R}$ définies par

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^2 + Ku^2)\, dx - \lambda \int_{\mathbf{R}^N} F(x,u)\, dx.$$

La famille $(I_\lambda)_{\lambda \in [1,2]}$ satisfait les hypothèses du Théorème 5.1 et comme dans le Corollaire 5.1 nous obtenons une suite $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset [1,2] \times H^1(\mathbf{R}^N)$ telle que $\lambda_n \to 1$, $I_{\lambda_n}(u_n) = c(\lambda_n)$ et $I'_{\lambda_n}(u_n) = 0$. Si $\{u_n\}$ est bornée, c'est une suite BPS pour I_1. Il est alors facile de trouver une solution non triviale de (P). Pour prouver que $\{u_n\}$ est bornée on développe une approche qui peut être utilisée dans de nombreux problèmes où (SQC) n'est pas satisfaite. Supposons au contraire que $\|u_n\| \to \infty$. Alors si on pose $w_n = u_n\|u_n\|^{-1}$ il existe, en utilisant si nécessaire l'invariance par translation de (P), une sous-suite toujours notée $\{w_n\}$, convergeant faiblement vers un $w \in H^1(\mathbf{R}^N)$ et qui satisfait l'alternative :

(1) $\exists \alpha > 0$, $R < \infty$ tels que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_R(0)} w_n^2\, dx \geq \alpha > 0,$$

(2) $\forall R < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y \in \mathbf{Z}^N} \int_{y+B_R(0)} w_n^2\, dx = 0.$$

Nous allons maintenant montrer que ni (1) ni (2) ne peut se produire. Si nous supposons que $\{w_n\}$ satisfait (1) alors $w \neq 0$. Pour obtenir une contradiction on montre, lorsque $a < \infty$, que $w \neq 0$ satisfait l'équation

$$-\Delta w + Kw = aw, \ x \in \mathbf{R}^N.$$

Puisque l'opérateur $-\Delta$ n'a pas de vecteur propre dans $H^1(\mathbf{R}^N)$ c'est une contradiction. Lorsque $a = \infty$ on montre que la condition $f(x,s)s^{-1} \to \infty$ lorsque $s \to \infty$ p.p. $x \in \mathbf{R}^N$ impose à l'ensemble $\Omega := \{x \in R^N; w(x) > 0\}$ d'être de mesure nulle. Mais ce n'est pas le cas puisque $w \neq 0$. Maintenant on montre que (2) est incompatible avec le comportement radial simple de I_1 garanti par (H5).

Les techniques que nous avons développées pour montrer que la suite $\{u_n\}$ est bornée peuvent parfois être utilisées sur des suites de Cerami arbitraires. Puisque la théorie de Ljusternik-Schirelmann reste vraie lorsque la condition de compacité de Cerami remplace la condition PS, notre approche permet d'obtenir des résultats de multiplicité pour des problèmes de type (P) posés sur un domaine borné de $\mathbf{R}^N$. De tels résultats améliorent ceux de [A]. Aussi dans beaucoup d'articles, les conditions (SQC) et (H5) sont conjointement supposées (voir par exemple [ACM, DF]). La condition (SQC), qui implique que les suites PS sont bornées, est utilisée pour obtenir un point critique. Ensuite (H5) garanti que ce point critique possède une bonne caractérisation variationnelle. Notre résultat prouve que (SQC) n'est pas nécessaire dans ces travaux. Mentionnons finalement que nos techniques jouent un rôle central dans [SZ2, SZ3] où des versions de (P) sont étudiées.

Retour sur les problèmes de bifurcation : Revenons maintenant aux problèmes de bifurcation discutés dans la section 2. Comme nous allons le voir, l'approche à l'existence de suites PS bornées développée dans [12], est très utile pour prouver l'existence de points de bifurcation. Dans [14] on considère la famille d'équations

$$-\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(x, u(x)),\ \lambda > 0,\ x \in \mathbf{R}^N, \tag{5.3}$$

où l'on suppose qu'il existe $\delta > 0$ est tel que

(H1) $f : \mathbf{R}^N \times [-\delta, \delta] \to \mathbf{R}$ est Carathéodory.

(H2) $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x,s) = 0$ uniformément pour $s \in [-\delta, \delta]$.

(H3) Il existe $K > 0$ tel que $\limsup\limits_{s\to 0} |f(x,s)s^{-1}| \leq K$ uniformément en $x \in \mathbf{R}^N$.

(H4) $\lim\limits_{s\to 0} F(x,s)s^{-2} = 0$ uniformément en $x \in \mathbf{R}^N$ avec $F(x,s) := \int_0^s f(x,t)\,dt$.

(H5) Il existe $A > 0$, $d \in]0,2[$ et $\alpha \in]0, \frac{2(2-d)}{N}[$ tel que

$$F(x,s) \geq A(1+|x|)^{-d}|s|^{2+\alpha} \text{ pour tout } s \in [-\delta, \delta].$$

Comme dans la section 2, on dit que $\lambda = 0$ est un point de bifurcation s'il existe une suite $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbf{R}^+ \times H^1(\mathbf{R}^N)\backslash\{0\}$ de solutions de (5.3) avec $\lambda_n \to 0$ et $||u_n||_{H^1(\mathbf{R}^N)} \to 0$. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 5.3 *Si (H1)-(H5) sont satisfaites, alors $\lambda = 0$ est un point de bifurcation pour (5.3).*

Dans les études sur la bifurcation pour des équations de type (5.3) que je connais, on suppose toujours que f est définie sur tout $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ et satisfait des conditions de croissance du type de (SQC) (voir [Stu1, Stu2, Stu3] et les références qui y sont contenues).

L'intérêt de notre résultat est que seules des conditions sur $f(x, .)$ autour de zéro sont requises mais surtout que ces conditions sont très faibles. Pour prouver le Théorème 5.3 on commence par changer f en $\tilde{f}$ à l'extérieur de $[-\delta, \delta]$ en choisissant $\tilde{f}$ de sorte que pour tout $u \in H$,

$$\int_{\mathbf{R}^N} \tilde{F}(x,u)\,dx \leq \frac{K}{2}||u||_2^2 \quad \text{où} \quad \tilde{F}(x,s) := \int_0^s \tilde{f}(x,t)\,dt. \tag{5.4}$$

On introduit ensuite, pour $\lambda > 0$, la famille de fonctionnelles $I_\lambda : H \to \mathbf{R}$, définies par

$$I_\lambda(u) = ||\nabla u||_2^2 + \lambda\, ||u||_2^2 - 2\int_{\mathbf{R}^N} \tilde{F}(x,u)\,dx$$

associée à la version modifiée de (5.3). On montre, en utilisant (H5), qu'il existe $\lambda_0 > 0$, tel que pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$, les ensemble suivants sont non vides

$$\Gamma_\lambda := \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbf{R}^N)), \gamma(0) = 0 \text{ et } I_\lambda(\gamma(1)) < 0\}$$

et

$$c(\lambda) := \inf_{\gamma \in \Gamma_\lambda} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > I_\lambda(0) = 0.$$

Donc I_λ a, pour $\lambda \in]0, \lambda_0]$, une *géométrie de col*. De plus la fonction $\lambda \to c(\lambda)$ est croissante et nous sommes donc dans la situation du Théorème 5.1. On en déduit que, lorsque $c'(\lambda)$ existe, I_λ possède une suite BPS, $\{u_m\} \subset H^1(\mathbf{R}^N)$ au niveau $c(\lambda)$. Par la condition de compacité (H2), cela conduit à l'existence d'un point critique non trivial de I_λ. Ceci n'est cependant pas suffisant pour obtenir le Théorème 5.3 ; on a besoin d'estimations précises sur la taille de ces points critiques. On les obtient en raffinant la preuve de l'existence de $\{u_m\} \subset H^1(\mathbf{R}^N)$. L'argument est en gros le suivant. Tout d'abord on montre que $||u_m||_2$ est controlée par $c(\lambda)$ et $c'(\lambda)$. Nous entendons par là que $||u_m||_2$ tend vers zéro, uniformément en $m \in \mathbf{N}$, si $c(\lambda) \to 0$ et $c'(\lambda) \to 0$. Par suite, comme

$$||\nabla u_m||_2^2 + \lambda ||u_m||_2^2 - 2\int_{\mathbf{R}^N} \tilde{F}(x, u_m)\,dx \to c(\lambda)$$

il suit de (5.4) que $||\nabla u_m||_2$ est aussi controlée par $c(\lambda)$ et $c'(\lambda)$. Donc $\{u_m\}$ est contenue dans une boule centrée à l'origine dont le rayon tend vers zéro lorsque $c(\lambda) \to 0$ et $c'(\lambda) \to 0$. Maintenant on montre grâce à des fonctions tests que $c(\lambda)\lambda^{-1} \to 0$ lorsque $\lambda \to 0$, ce qui implique l'existence d'une suite strictement décroissante $\lambda_n \to 0$ telle que $c(\lambda_n) \to 0$ et $c'(\lambda_n) \to 0$. En appelant $\{u_n\}$ la suite des solutions correspondant à $\{\lambda_n\}$, on déduit immédiatement que $||u_n||_{H^1(\mathbf{R}^N)} \to 0$ et cela prouve la bifurcation pour le problème modifié. On montre alors que la bifurcation advient en norme L^∞ et donc pour (5.3).

L'approche à l'existence de points de bifurcation développée dans [14] est considérablement généralisée dans [15], en collaboration avec J. Giacomoni. Nous considérons un problème aux valeurs propres non linéaire général

$$(P) \quad (A - \lambda L)u = N(u) \;\; \text{dans} \;\; H$$

où H est un espace de Hilbert réel. On note $< \cdot, \cdot >$ et $\| \cdot \|$ respectivement son produit scalaire et sa norme. Les opérateurs A et L sont linéaires, bornés et autoadjoints avec :

(A1) $< Lu, u >> 0$ pour tout $u \in H \backslash \{0\}$, $\sigma(A) \cap \mathbf{R}^+ \neq \emptyset$, $\sigma(A) \cap \mathbf{R}^- \neq \emptyset$ et $0 \notin \sigma(A)$.

Pour le terme non linéaire N on suppose qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ et une fonction positive $\phi \in C^2(B_{\varepsilon_0}, \mathbf{R})$ avec $N = \nabla \phi$ sur $B_{\varepsilon_0} := \{u \in H; \|u\| \leq \varepsilon_0\}$ qui satisfait

(A2) $\phi(u)\|u\|^{-2} \to 0$ lorsque $\|u\| \to 0$

(A3) il existe $q > 2$ tel que $< N(u), u >\leq q\phi(u)$ pour tout $u \in B_{\varepsilon_0}$.

Soit $\rho(A, L) = \{\lambda \in \mathbf{R}\,;\, A - \lambda L \,:\, H \to H$ est un isomorphisme$\}$ et $\sigma(A, L) = \mathbf{R} \backslash \rho(A, L)$. L'hypothèse (A1) implique l'existence de $a, b \in \mathbf{R}$, $a < 0 < b$, tels que $[a, b] \cap \sigma(A, L) = \{a, b\}$. C'est à dire que 0 appartient à la lacune spectrale $]a, b[$ de $\sigma(A, L)$. Le but de notre travail est d'étudier s'il y a bifurcation de solutions en b. Notre approche est variationnelle et commence par l'observation que $(\lambda, u) \in \mathbf{R} \times B_{\varepsilon_0}$ est une solution de (P) si et seulement si u est un point critique de la fonctionnelle :

$$J(\lambda, u) = \frac{1}{2} < (A - \lambda L)u, u > -\phi(u).$$

D'après le théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints, puisque $0 \notin \sigma(A)$, H se décompose en deux sous-espaces orthogonaux V et W qui correspondent respectivement à la partie positive et à la partie négative de $\sigma(A)$, à savoir $H = V \oplus W$. Soient P et Q les projections orthogonales de H sur V et W. Pour $\lambda \in]a, b[$ la forme quadratique $< (A - \lambda L)u, u >$ est définie positive sur V et définie négative W. Dans le cadre général, que nous voulons considérer, à la fois V et W sont de dimensions infinies et donc $J(\lambda, \cdot)$ est fortement indéfinie lorsque $\lambda \in]a, b[$. Au vu de ces propriétés spectrales (P) généralise l'équation (2.1) (voir section 2). Mais (P) peut aussi être utilisée pour décrire des équations de Dirac non linéaires comme dans [ES] ou même des systèmes hamiltoniens [Bu, CES, Stu5].

Pour $\delta > 0$ on dit que la condition $T(\delta)$ est satisfaite si $PL = LP$ et s'il existe un $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et une suite $\{u_n\} \subset H$ avec $\|u_n\| = \varepsilon$ telle que $\phi(u_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et

$$\lim_{n \to \infty} \frac{< (A - bL)u_n, u_n >}{\phi(u_n)^\delta} = \lim_{n \to \infty} \frac{\|(A - bL)u_n\|^2}{\phi(u_n)^\delta} = 0.$$

Théorème 5.4 *On suppose que (A1)-(A3) sont satisfaites, que* $T(\delta)$ *est vérifiée pour un* $\delta \geq 1$ *et que les hypothèses suivantes sont satisfaites*

(A4) Il existe $K > 0$ tel que $\|N(u)\| \leq K\phi(u)^{1-\frac{\delta}{2}}$ pour $u \in B_{\varepsilon_0}$.

(A5) N est compact.

Alors, il existe une suite $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset]a, b[\times H$ de solutions non triviales de (P) telle que $\lambda_n \to b$ et $||u_n|| \to 0$. En particulier, b est un point de bifurcation pour (P).

La condition $T(\delta)$ peut sembler technique, mais dans les applications (sur (2.1) par exemple) elle s'avère souvent nécessaire. Mentionnons qu'il y a dans [15] une version du Théorème 5.4 où des non-linéarités non compactes sont permises.

Un intérêt majeur du Théorème 5.4 est sa généralité. Nous offrons dans [15] une approche générale à la théorie de la bifurcation par méthodes variationnelles en l'absence d'estimations à priori sur les suites PS associées. Lorsque nous l'appliquons à l'équation (2.1) de la section 2, le Théorème 5.4 implique que b est un point de bifurcation sous les mêmes hypothèses (H1)-(H5) introduites sur (5.3) pour prouver la bifurcation en $\lambda = 0$. Nous renvoyons à [Tr] pour le résultat précédent le plus fin sur (2.1). Le résultat le plus proche du Théorème 5.4, sous sa forme générale, est le Théorème 7.2 de [Stu5]. Dans [Stu5], (P) est aussi étudiée et la bifurcation en b établie. Cependant, en plus de (A1)-(A5), ϕ doit être globalement définie, convexe et il doit exister un $p > 2$ tel que $< N(u), u >\geq p\phi(u)$ $\forall u \in H$ et C, $D > 0$ tels que $\|N(u)\| \leq C + D\phi(u), \forall u \in H$.

Les grandes lignes de la preuve du Théorème 5.4 sont les suivantes : tout d'abord on montre que les solutions (λ, u) de (P) pour λ proche de b et $\|u\|$ petite sont de la forme $(\lambda, v + g(\lambda, v))$ avec $v \in V$. La fonction g, définie dans un voisinage de $(b, 0) \subset \mathbf{R} \times V$, est obtenue par un théorème de fonction implicite. Après cette réduction de Lyapunov-Schmidt, on définit la fonctionnelle $F(\lambda, v) := J(\lambda, v + g(\lambda, v))$ sur une (petite) boule $B_c(V) := \{v \in V; \|v\| \leq c\}$ de V. La fonctionnelle F a la propriété que si v est un point critique de $F(\lambda, \cdot)$ alors $v + g(\lambda, v)$ est un point critique de $J(\lambda, \cdot)$. Pour pouvoir effectuer la réduction on a besoin de (A2) mais, à la différence de [Stu5], aucune convexité n'est requise puisque la réduction est seulement locale. On développe un argument variationnel pour $F(\lambda, \cdot)$ dans $B_c(V)$. En utilisant la condition $T(\delta)$, qui, combinée avec (H3), joue le rôle de (H5) dans [14], on montre qu'il existe $\lambda_0 \in]a, b[$ tel qu'en posant

$$\Gamma_\lambda := \{\gamma \in C([0,1], B_c(V)) \,; \gamma(0) = 0 \,,\ F(\lambda, \gamma(1)) < 0\},$$

Γ_λ est non vide pour tout $\lambda \in [\lambda_0, b[$ et

$$c(\lambda) := \inf_{\gamma\in\Gamma_\lambda} \max_{t\in[0,1]} F(\lambda, \gamma(t)) > 0.$$

Toujours en utilisant $T(\delta)$, on obtient, comme dans [H2, Stu5], des estimations sur le comportement de $c(\lambda)$ lorsque $\lambda \to b$. Ces estimations, combinées avec l'observation que la fonction $\lambda \to c(\lambda)$ est décroissante, nous permettent de montrer l'existence d'une suite $\{\lambda_n\} \subset]a, b[$, $\lambda_n \to b$ pour laquelle $c(\lambda_n) \to 0$ et $c'(\lambda_n) \to 0$. Par la géométrie de

$F(\lambda, \cdot), \lambda \in]\lambda_0, b[$, nous savons que $F(\lambda_n, \cdot)$ possède une suite BPS, $\{u_n^m\} \subset V$. Il est assez standard de montrer que $\{u_n^m\}$ converge, lorsque $m \to \infty$, vers une solution non triviale u_n de (P). Comme dans [14] on voudrait montrer que $||u_n|| \to 0$ lorsque $c(\lambda_n) \to 0$ et $c'(\lambda_n) \to 0$. Cela prouverait le Théorème 5.4. Ce point est maintenant plus délicat puisque la partie non quadratique de la fonctionnelle ne peut pas en général être contrôlée par $< L\cdot, \cdot >$. Ce terme joue le rôle de la norme L^2 dans [14]. On surmonte cette difficulté en contrôlant directement la partie non quadratique par la norme de H. C'est possible, si l'on travaille dans une boule $B_c(V)$ suffisamment petite, puisque $\phi(u)\|u\|^{-2} \to 0$ lorsque $\|u\| \to 0$. Cette idée est liée à l'introduction de l'ensemble V dans [1,2] (voir section 2).

Nous avons résumé ici les grandes lignes de la preuve du Théorème 5.4 qui demande en fait une utilisation optimum de nos hypothèses. La monotonie de $\lambda \to c(\lambda)$ dépend de manière essentielle d'une interprétation variationnelle de la réduction de Lyapunov-Schmidt. Aussi la convexité de ϕ n'était pas seulement utilisée précédemment pour faire la réduction globale mais aussi pour obtenir les estimations à priori sur $c(\lambda)$. Puisque nous ne demandons pas dans [15] de convexité, la dérivation de ces mêmes estimations demande de nouvelles idées.

Bibliographie

[ABG] Alama S., Bronsard L. et Gui C., Stationary layered solutions in $\mathbf{R}^2$ for an Allen-Cahn system with multiple well potential, *Calc. Var.*, **5**, (1997), 359-390.

[AL1] Alama S. et Li Y.Y., Existence of solutions for semilinear elliptic equations with indefinite linear part, *J. Diff. Equat.*, **96**, (1992), 89–115.

[AL2] Alama S. et Li Y.Y., On Multibump bound states for certain semilinear elliptic equations, *Indiana Univ. Math. J.*, **41**, 4, (1992), 983-1026.

[ACM] Alessio F., Caldiroli P. et Montecchiari P., Genericity of the multibump dynamics for almost periodic Duffing-like systems, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, à paraitre.

[AM] Alessio F. et Montecchiari P., Multibump solutions for a class of Lagrangian systems slowly oscillating at infinity, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Lin.*, à paraitre.

[A] Ambrosetti A., Esistenza di infinite soluzioni per problemi non lineari in assenza di parametro, *Atti Acc. Naz. Lincei*, **52**, (1972), 660-667.

[AB] Ambrosetti A. et Badiale M., Homoclinics: Poincaré-Melnikov type results via a variational approach, *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non-lin.*, **15** (1998), 233-252. and also *C. R. Acad. Sci. Paris*, **t. 323**, Série 1, (1996), 753-758.

[ABe] Ambrosetti A. et Bertotti M. L., Homoclinics for second order conservative systems, *Partial Differential Equations and Related Subjects (ed. M. Miranda)*, Pitman Research Note in Math. Ser., (1992).

[AC] Ambrosetti A. et Coti Zelati V., Multiple homoclinic orbits for a class of conservative systems, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **89**, (1993), 177–194. See also Multiplicité des orbites homoclines pour des systèmes conservatifs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **314**, (1992), 601–604.

[AR] Ambrosetti A. et Rabinowitz P.H., Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Funct. Anal.*, **14**, (1973), 349-381.

[AS] Ambrosetti A. et Struwe M., Existence of steady vortex rings in an ideal fluid, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **108**, (1989), 97-109.

[An] Anosov D. V., Geodesic flows on compact Riemann manifolds of negative curvatures, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **90**, (1967); English transl. Amer. Math. Soc. Transl., (1969).

[BBF] Bartolo P., Benci V. et Fortunato D., Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong" resonance at infinity, *Nonlinear Analysis*, TMA, **7**, (1983), 981-1012.

[Ben] Benci V., On Critical point theory for indefinite functionnals in the presence of symmetries, *Trans. AMS*, **272**, (2), (1982), 533-572.

[Bes] Bessi U., A variational Proof of a Sitnikov-like Theorem, *Nonl. Anal. TMA*, **20**, (1993), 1303-1318.

[BC] Benci V. et Cerami G., Positive solutions of some nonlinear elliptic problems in exterior domains, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **99**, (1987), 283-300.

[BR] Benci V. et Rabinowitz P.H., Critical point theorems for indefinite functions, *Invent. Math.*, **52**, (1979), 241–273.

[BL1] Berestycki H. et Lions P.L., Nonlinear scalar field equations I, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **82**, (1983), 313-346.

[BL2] Berestycki H. et Lions P.L., Nonlinear scalar field equations II, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **82**, (1983), 347-376.

[Ber] Bertotti M.L., Homoclinics for Lagrangian systems on Riemannian manifolds, *Dyn. Sys. Appl.*, **1**, (1992), 341–368.

[BB] Bertotti M.L. et Bolotin S.V., Homoclinic solutions of quasiperiodic Lagrangian systems, *Diff. Int. Equat.*, **8**, (1995), 1733-1760.

[Bo] Bolotin S.V., Libration motions of reversible Hamiltonian systems, *Dissertation, Moscow State University, Moscow, USSR*, (1981), (in Russian).

[BK] Bolotin S.V. et Kozlov V.V, Libration in systems with many degrees of freedom, *Prikl. Mat. Mekh.*,**42**, (1978), 245–250; English trans. in *J. Appl. Math. Mech.*,**42**, (1978), 256–261.

[BNe] Bolotin S.V. et Negrini P., Variational criterion for nonintegrablity of a double pendulum, *Russian J. Math. Phys.*, **5**, (1997), 415-436.

[BR1] Bolotin S.V. et Rabinowitz P.H., A variational construction of chaotic trajectories for a reversible Hamiltonian system, *J. Diff. Eqs.*, **148**, (1998), 364-387.

[BR2] Bolotin S.V. et Rabinowitz P.H., A Variational Construction of Chaotic Trajectories for a Hamiltonian System on a Torus *Bolletino U.M.I.*, **8**, 1-B, (1998), 541-570.

[Br] Brezis H., *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.

[BC] Brezis H. et Coron J.M., Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture. *Comm. Pure Appl. Math.*, **37**, (1984), 149-187.

[BCN] Brezis H., Coron J.M. et Nirenberg L., Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P.H. Rabinowitz, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**, (1980), 667–689.

[BN1] Brezis H. et Nirenberg L., Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Comm. Pure Appl. Math.*, **36**, (1983), 437-477.

[BN2] Brezis H. et Nirenberg L., Remarks on finding critical points, *Comm. Pure Appl. Math.*, **44**, (1991), 939–963.

[Bu] Buffoni B., Un problème variationnel fortement indéfini sans compacité, *Ph. D. Thesis, EPFL,* Lausanne, (1992).

[BS] Buffoni B. et Séré E., A global condition for quasi random behavior in a class of conservative systems, *Com. Pure and Appli. Math.*, **XLIX**, (1996), 285-305.

[Ca] Caldiroli P., Existence and multiplicity of homoclinic orbits for singular potentials on unbounded domains, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **124**, (1994), 317-339.

[CD] Caldiroli P. et De Coster C., Multiple Homoclinics for a class of singular Hamiltonian systems, *J. Math. Anal. Appl.*, **211**, (1997), 556-573.

[CM] Caldiroli P. et Montecchiari P., Homoclinic orbits for second order Hamiltonian systems with potential changing sign, *Comm. Appl. Nonl. Anal.* **1**, (1994), 97-129.

[CN] Caldiroli P. et Nolasco M., Multiple homoclinic solutions for a class of autonomous singular systems in $\mathbf{R}^2$., *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non-lin.*, **15**, (1998), 113-125.

[CZ] Cao D.M. et Zhou H.S., Multiple positive solutions of nonhomogeneous semilinear elliptic equations in $\mathbf{R}^N$, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **126 A**, (1996), 443-463.

[Ce] Cerami G., Un criterio di esistenza per i punti critici su varietà ilimitate, *Rend. Acad. Sci. Let. Ist. Lombardo*, **112**, (1978), 332-336.

[CES] Coti-Zelati V., Ekeland I. et Séré E., A variational approach to homoclinic orbits in Hamiltonian systems, *Math. Ann.*, **288**, (1990), 133–160.

[CR] Coti Zelati V. et Rabinowitz P.H., Homoclinic orbits for second order Hamiltonian systems possessing superquadratic potentials, *J. Amer. Math. Soc.*, **4**, (1991), 693–727.

[DF] Del Pino M. et Felmer P., Local mountain pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains, *Calc. Var. and PDE*, **4**, (1996), 121-137.

[E1] Ekeland I., Convexity methods in Hamiltonian Mechanics, *Springer*, (1990).

[ES] Esteban M.J. et Séré E., Stationnary states of the nonlinear Dirac equation : a variational approach, *Comm. Math. Phys.*, **171**, (1995), 323–350.

[F] Felmer P., Heteroclinic orbits for spatially periodic Hamiltonian systems *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*, **8**, (1991), 477-497.

[G] Ghoussoub N., Duality and perturbation methods in critical point theory, *Cambridge University Press*, **107**, (1993).

[GG] Ghoussoub N. et Gui C., On a conjecture of De Giorgi and some related problems, *Math. Ann.*, **311**, (1998), 481-491.

[GH] Guckeneimer J. et Holmes P., Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, *Springer–Verlag*, **42**, (1983).

[H1] Heinz H.P., Bifurcation from the essential spectrum for nonlinear pertubations of Hill's equation, in 'Differential Equations-Stability and Control'(ed. S. Elaydi), *Marcel Dekker, New York*, (1990), 219–226.

[H2] Heinz H.P., Lacunary bifurcation for operator equations and nonlinear boundary value problems on $\mathbf{R}^N$, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **118**, (1991), 237-270.

[H3] Heinz H.P., Existence and gap-bifurcation of multiple solutions to certain nonlinear eigenvalue problems, *Nonlinear Analysis*, TMA, *21*, (1993), 457-484.

[HKS] Heinz H.P., Küpper T. et Stuart C.A., Existence and bifurcation of solutions for nonlinear pertubations of the periodic Schrödinger equation, *J. Diff. Equat.*, **100**, (1992), 341-354.

[HS] Heinz H.P. et Stuart C.A., Solvability of nonlinear equations in spectral gaps of the linearisation, *Nonlin. Anal. TMA*, **19**, (1992), 145-165.

[HW] Hofer H. et Wysocki K., First order elliptic system and the existence of homoclinic orbits in Hamiltonian systems, *Math. Ann.*, **288**, (1990), 483-503.

[K] Kozlov V., Calculus of variations in the large and classical mechanics, *Russ. Math. Surv.*, **40**, (1985), 37–71.

[KS] Kryszewski W. et Szulkin A., Generalized linking theorem with an application to a semilinear Schrödinger equation, *Ad. Diff. Equat.*, **3**, (1998), 441-472.

[KS1] Küpper T. et Stuart C.A., Bifurcation into gaps in the essential spectrum, *J. Reine Angew. Math.*, **409**, (1990), 1–34.

[KS2] Küpper T. et Stuart C.A., Gap-bifurcation for nonlinear perturbations of Hill's equation, *J. Reine Angew. Math.*, **410**, (1990), 23-52.

[L1] Lions P.L., The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. Part I and II., *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non-lin.*, **1** (1984), 109-145 and 223-283.

[L2] Lions P.L., The concentration–compactness principle in the calculus of variations *Rev. Mat. Iberoamericana*, **1**, (1985), 145-201.

[M] Melnikov V.K., On the stability of the center for periodic perturbations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12**, (1963), 1-57.

[MNT] Montecchiari P., Nolasco M. et Terracini S., A global condition for periodic Duffing-like equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[N] Nehari Z., On a class of nonlinear integral equations, *Math Z.*, **72**, (1959), 175-183.

[P] Pohozaev S., Eigenfunctions of the equations $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, *Soviet Math. Dokl.*, **6**, (1965), 1408-1411.

[Poi] Poincaré H., Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, *Gauthier–Villars*, Paris, (1897-1899).

[R1] Rabinowitz P.H., Some global results for nonlinear eigenvalues problems, *J. Func. Analysis*, **7**, (1971), 487-513.

[R3] Rabinowitz P.H., Periodic and heteroclinic orbits for a periodic Hamiltonian system, *Ann. Inst. H. Poincaré: Analyse Non Linéaire*, **6**, (1989), 331–346.

[R4] Rabinowitz P.H., Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **114**, (1990), 33–38.

[R5] Rabinowitz P.H., Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system, *Ergodic Theory and Dynamical systems*, **14**, (1994), 817-829.

[R6] Rabinowitz P.H., Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system, 2, *Differential and Integral Equations*, **7**, (1994), 1557-1572.

[R7] Rabinowitz P.H., Homoclinics for a singular Hamiltonian system, *Geometrical Analysis and the Calculus of Variations*, J. Jost (ed), International Press.

[R8] Rabinowitz P.H., Heteroclinics for a Hamiltonian system of Double Pendulum type, *Top. Meth. Nonl. Analy.*, **9**, (1997), 41-76.

[RT] Rabinowitz P.H. et Tanaka T., Some results on connecting orbits for a class of Hamiltonian system, *Math. Zeit.*, **206**, (1991), 473-499.

[Sa] Saks S., Theory of the Integral, *Hafner, New York*, (1937).

[Stra] Strauss W.A., Existence of solitary waves in higher dimensions, *Comm. Math. Phys.*, **55**, (1977), 149-162.

[Se1] Séré E., Existence of infinitely many homoclinic orbits in Hamiltonian systems, *Math. Zeit.*, **209**, (1992), 27–42.

[Se2] Séré E., Looking for the Bernoulli shift, *Ann. Inst. H. Poincaré: Analyse Non Linéaire*, **10**, (1993), 561-590.

[Str1] Struwe M., The existence of surfaces of constant mean curvature with free boundaries, *Acta Math.*, **160**, (1988), 19-64.

[Str2] Struwe M., Existence of periodic solutions of Hamiltonian systems on almost every energy surface, *Boletim Soc. Bras. Mat.*, **20** (1990), 49-58.

[Str3] Struwe M., *Variational Methods*, Springer, Second Edition, (1996).

[ST] Struwe M. et Tarantello G., On multivortex solutions in Chern-Simons gauge theory, *Bolletino UMI Nuova serie Sezione Scientifica* I-vol (1997).

[Stu1] Stuart C.A., Bifurcation from the continuous spectrum in L^2- theory of elliptic equations on $\mathbf{R}^N$, *Recent Methods in Nonlinear Analysis and Applications*, Liguori, Napoli, (1981).

[Stu2] Stuart C.A., Bifurcation from the essential spectrum, *Equadiff 82*, (eds H.W. Knobloch and K. Schmitt), Lecture notes in Mathematics 1017 (Springer, berlin, 1983), 573-596.

[Stu3] Stuart C.A., Bifurcation in $L^p(\mathbf{R}^N)$ for a semilinear elliptic equation, *Proc. London Math. Soc.*, **57**, (1988), 511-541.

[Stu4] Stuart C.A., Bifurcation from the essential spectrum for some non-compact nonlinearities, *Math. Methods in the Applied Sciences*, **11**, (1989), 525-542.

[Stu5] Stuart C.A., Bifurcation into spectral gaps, *Société Mathématique de Belgique*, (1995).

[SZ1] Stuart C.A. et Zhou H.S., A variational problem related to self-trapping of an electromagnetic field, *Math. Methods in the Applied Sciences*, **19**, (1996), 1397-1407.

[SZ2] Stuart C.A. et Zhou H.S., Existence of guided cylindrical TM-modes in a Homogeneous Self-focusing Dielectric, Preprint.

[SZ3] Stuart C.A. et Zhou H.S., Applying the Mountain-Pass Theorem to an asymtotically linear elliptic equation on $\mathbf{R}^N$, *Com. P.D.E.*, to appear.

[Tan1] Tanaka K., Homoclinic orbits for a singular second order Hamiltonian system, *Ann. Inst. H. Poincaré: Analyse Non Linéaire*, **7**, (1990), 427–438.

[Tan2] Tanaka K., Homoclinic orbits in a first order superquadratic Hamiltonian system: Convergence of subharmonic orbits, *J. Diff. Eq.*, **94**, (1991), 315–339.

[Tan3] Tanaka K., A note on the existence of multiple homoclinic orbits for a perturbed radial potential, *Nonlinear Diff. Eq. Appl.*, **1**, (1994), 149-162.

[Ta] Tarantello G., On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. non-lin.*, **9**, (1992), 281-304.

[Tr] Troestler C., Bifurcation into spectral gaps for a noncompact semilinear Schrödinger equation with nonconvex potential, Prépublication.

[TW] Troestler C. et Willem W., Nontrivial solution of a semilinear Schrödinger equation, *Comm. P.D.E.*, **21**, (1996), 1431–1449.

[W] Willem M., Minimax Theorems, *Birkhaüser*, Boston, (1996).

[Zhu] Zhu X.P., A perturbation result on positive entire solutions of a semilinear elliptic equation, *J. Diff. Equat.*, **92**, (1991), 163-178.

[ZZ] Zhou H.S. et Zhu X.P., Existence of multiple positive solutions of inhomogeneous semilinear elliptic problems in unbounded domains, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **115 A**, (1990), 301-318.

[Zho] Zhou H.S., Positive solution for a semilinear elliptic equation which is almost linear at infinity, ZAMP, **49**, (1998), à paraitre.

Liste de Publications

[1] Buffoni B. et Jeanjean L., *Bifurcation from the essential spectrum towards regular values*, J. Reine Angew. Math., **445**, 1993, 1-29.

[2] Buffoni B. et Jeanjean L., *Minimax characterisation of solutions for a semi-linear elliptic equation with lack of compactness*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non-lin., **10**, 1993, 377–404.

[3] Buffoni B., Jeanjean L. et Stuart C.A., *Existence of a non-trivial solution to a strongly indefinite semilinear equation,* Proc. A.M.S., **119**, 1993, 179-186.

[4] Jeanjean L., *Solution in spectral gaps for a nonlinear equation of Schrödinger type,* J. Diff. Equat., **112**, 1994, 53–80.

[5] Jeanjean L., *Approche minimax des solutions d'une équation semi-linéaire elliptique en l'absence de compacité*, Ph. D. Thesis, EPFL, Lausanne, 1992.

[6] Jeanjean L., *Existence of connecting orbits in a potential well*, Dyn. Sys. Appl., **3**, 1994, 537-562.

[7] Giannoni F., Jeanjean L. et Tanaka K., *Homoclinic orbits on non-compact Riemannian manifolds for second order Hamiltonian systems*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **3**, 1995, 153-176.

[8] Jeanjean L., *Existence of solutions with prescribed norm for semilinear elliptic equations*, Nonlinear Analysis TMA, **28**, 1997, 10, 1633-1659.

[9] Bertotti M.L. et Jeanjean L., *Multiplicity of homoclinic solutions for singular second order conservative systems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **128 A**, 1996, 1169-1180.

[10] Jeanjean L., *Two positive solutions for a class of nonhomogeneous elliptic equations*, Diff. Int. Equat., **10**, 1997, 609-624.

[11] Caldiroli P. et Jeanjean L., *Homoclinics and Heteroclinics for a class of conservative singular Hamiltonian systems*, J. Diff. Equ., **136**, 1997, 76-114.

[12] Jeanjean L., *On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer type problem set on* $\mathbf{R}^N$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, to appear.

[13] Jeanjean L. et Toland J.F., *Bounded Palais-Smale Mountain-Pass sequences*, C. R. Acad. Sci. Paris, **t. 327**, 1, 1998, 23-28.

[14] Jeanjean L., *Local conditions insuring bifurcation from the continuous spectrum*, Math. Z., à paraitre.

[15] Giacomoni J. et Jeanjean L., *A new variational approach to bifurcation into spectral gaps*, prépublication.

[16] Alessio F., Jeanjean L. et Montecchiari P., *Stationary layered solutions in* $\mathbf{R}^2$ *for a class of non autonomous Allen-Cahn equations*, prépublication.