Opérateurs de Ritt

Loris Arnold

Université de Franche-Comté

Journées des jeunes chercheurs, 2017

Définition

Définition

Soit $T \in B(X)$. Si T vérifie :

a) T est à puissances bornées

b) Il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $\left\| T^n - T^{n-1} \right\| \leq \dfrac{C}{n}$.

On dira alors dira que T est un opérateur de Ritt.

Définition

Définition

Soit $T \in B(X)$. Si T vérifie :

a) T est à puissances bornées

b) Il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $\left\| T^n - T^{n-1} \right\| \leq \dfrac{C}{n}$.

On dira alors dira que T est un opérateur de Ritt.

Remarque

Il est courant de trouver l'appellation d'opérateur de Tadmor-Ritt.

Caractérisation des opérateurs de Ritt

Théorème

Soit $T \in B(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) T est un opérateur de Ritt.

(ii) $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ et s'il existe $K \geq 1$ tel que pour tout $\lambda \notin \overline{\mathbb{D}}$,

$$\|R(\lambda, T)\| \leq \frac{K}{|\lambda - 1|}.$$

Caractérisation des opérateurs de Ritt

Théorème

Soit $T \in B(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) T est un opérateur de Ritt.

(ii) $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ et s'il existe $K \geq 1$ tel que pour tout $\lambda \notin \overline{\mathbb{D}}$,

$$\|R(\lambda, T)\| \leq \frac{K}{|\lambda - 1|}.$$

Remarque

Si $T \in B(X)$ vérifie (*ii*) alors $\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$.

Le théorème de Katznelson et Tzafriri

Théorème

Soit $T \in B(X)$ un opérateur à puissances bornées. Alors $\left\| T^n - T^{n-1} \right\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$.

Le théorème de Katznelson et Tzafriri

Théorème

Soit $T \in B(X)$ un opérateur à puissances bornées. Alors $\left\| T^n - T^{n-1} \right\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$.

Théorème

Soit A une algèbre de Banach, et $x \in A$ inversible est à puissances bornées dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire, $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|x^n\| < +\infty$. Si $\sigma(x) = \{1\}$ alors $x = 1$.

Le théorème de Katznelson et Tzafriri

Théorème

Soit $T \in B(X)$ *un opérateur à puissances bornées. Alors* $\left\| T^n - T^{n-1} \right\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ *si et seulement si* $\sigma(T) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$.

Théorème

Soit A *une algèbre de Banach, et* $x \in A$ *inversible est à puissances bornées dans* $\mathbb{Z}$*, c'est-à-dire,* $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x^n\| < +\infty$ *. Si* $\sigma(x) = \{1\}$ *alors* $x = 1$.

Proposition

Soit $T \in B(X)$ *une isométrie. Alors*

(i) *Ou bien* $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$ *ou bien* $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$

(ii) $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$ *si et seulement si* T *est bijectif.*

Lemme utile

Lemme

Soit $T \in B(X)$ *vérifiant que* $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ *et il existe* $K \geq 1$ *tel que pour tout* $\lambda \notin \overline{\mathbb{D}}$, $\|R(\lambda, T)\| \leq \frac{K}{|\lambda - 1|}$, *alors il existe un angle* $\gamma \in]0, \frac{\pi}{2}[$ *tel que*

$$\sigma(T) \subset \overline{B_\gamma}$$

où B_γ *est un domaine de Stolz d'angle* γ, *c'est-à-dire l'enveloppe convexe du point* 1 *et du disque de centre l'origine et de rayon* $\sin(\gamma)$ *(voir figure 1). De plus pour tout* $\beta \in]\gamma, \frac{\pi}{2}[$, *l'ensemble*

$$\{(\lambda - 1)R(\lambda, T) \,:\, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_\beta}\}$$

est borné.

Domaine de Stolz

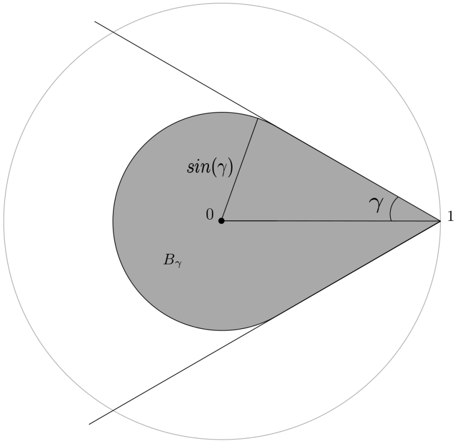

FIGURE: Domaine de Stolz

Démonstration de la caractérisation

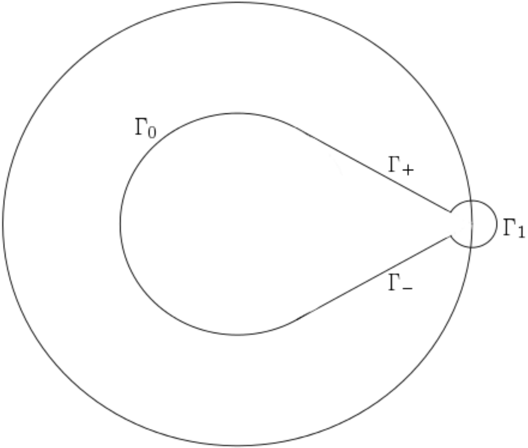

FIGURE: Contour d'intégration

Le calcul fonctionnel holomorphe

On a

$$T^{n-1}(I - T) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lambda^{n-1}(1 - \lambda) R(\lambda, T) d\lambda$$

et

$$T^n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \lambda^n R(\lambda, T) d\lambda$$

Le calcul fonctionnel holomorphe

Comme $\{(\lambda - 1)R(\lambda, T) \,:\, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{B_\alpha}\}$ est borné, il reste à montrer que les intégrales

$$I_k = k\int_\gamma |\lambda|^k |d\lambda| \;\text{ et }\; J_k = \int_\gamma \frac{|\lambda|^k}{|\lambda - 1|} d|\lambda|$$

sont uniformément bornées (en k).

Semi-groupes analytiques

Définition

Un c_0-semigroupe sur X est une famille $(T_t)_{t>0}$ d'opérateurs tels que $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ pour tous $s, t \geq 0$, $T_0 = I$ et $t \mapsto T_t(x)$ est continue pour tout $x \in X$. Il est dit borné s'il existe une constante C_0 telle que $\|T_t\| \leq C_0$ pour tout $t \geq 0$. De plus il est dit analytique borné s'il existe $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et une fonction analytique bornée

$$F : S_\alpha := \{z \in \mathbb{C}, |arg(z)| < \alpha\} \to B(X)$$

telle que $F(t) = T_t$ pour $t \geq 0$, $F(z_1 + z_2) = F(z_1) \circ F(z_2)$ pour tout $z_1, z_2 \in S_\alpha$ et $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in S_\alpha}} F(z)x = x$ pour tout $x \in X$.

Semi-groupes analytiques

Théorème

Soit $(T_t)_{t\geq 0}$*, un* c_0*-semigroupe borné sur* X*, de générateur* $-A$*. Les assertions sont équivalentes.*

- *(i)* $(T_t)_{t\geq 0}$ *est analytique borné.*
- *(ii) Il existe* $0 < \omega < \dfrac{\pi}{2}$ *et une constante* $K \geq 0$ *tels que* $\sigma(A) \subset \overline{S_\omega}$ *et* $|\lambda|\,\|R(\lambda, A)\| \leq K$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{S_\omega}$*.*
- *(iii) Il existe* $C_1 \geq 0$ *tel que* $t\,\|AT_t(x)\| \leq C_1$ *pour tout* $x \in D(A)$