Une introduction aux distributions tempérées et à leurs applications

Mustapha Mokhtar-Kharroubi

Ecole de Frasne: Initiation à la recherche

(19-22 janvier 2015)

Résumé

Après une présentation des propriétés de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide et des diverses opérations que l'on peut y effectuer (differentiation, convolution, transformation de Fourier...), on introduira l'espace dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées.

Résumé

Après une présentation des propriétés de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide et des diverses opérations que l'on peut y effectuer (differentiation, convolution, transformation de Fourier...), on introduira l'espace dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées. Nous montrerons comment tous les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, les fonctions (ou mesures) à croissance lente (i.e. au plus polynomiale) "s'injectent" dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Résumé

Après une présentation des propriétés de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide et des diverses opérations que l'on peut y effectuer (differentiation, convolution, transformation de Fourier...), on introduira l'espace dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées. Nous montrerons comment tous les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, les fonctions (ou mesures) à croissance lente (i.e. au plus polynomiale) "s'injectent" dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Par un procédé général de transposition, nous montrerons aussi comment nous pouvons étendre à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ toutes les opérations que l'on sait faire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Résumé

Après une présentation des propriétés de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide et des diverses opérations que l'on peut y effectuer (differentiation, convolution, transformation de Fourier...), on introduira l'espace dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées. Nous montrerons comment tous les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, les fonctions (ou mesures) à croissance lente (i.e. au plus polynomiale) "s'injectent" dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Par un procédé général de transposition, nous montrerons aussi comment nous pouvons étendre à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ toutes les opérations que l'on sait faire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Nous introduirons une classe très utile de sous espaces hilbertiens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ $(s \in \mathbb{R})$.

Résumé

Après une présentation des propriétés de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide et des diverses opérations que l'on peut y effectuer (differentiation, convolution, transformation de Fourier...), on introduira l'espace dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées. Nous montrerons comment tous les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, les fonctions (ou mesures) à croissance lente (i.e. au plus polynomiale) "s'injectent" dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Par un procédé général de transposition, nous montrerons aussi comment nous pouvons étendre à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ toutes les opérations que l'on sait faire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Nous introduirons une classe très utile de sous espaces hilbertiens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ $(s \in \mathbb{R})$. Dans la deuxième partie, nous utiliserons ces espaces de distributions pour résoudre diverses equations aux dérivées partielles:

Résumé

Après une présentation des propriétés de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide et des diverses opérations que l'on peut y effectuer (differentiation, convolution, transformation de Fourier...), on introduira l'espace dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées. Nous montrerons comment tous les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, les fonctions (ou mesures) à croissance lente (i.e. au plus polynomiale) "s'injectent" dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Par un procédé général de transposition, nous montrerons aussi comment nous pouvons étendre à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ toutes les opérations que l'on sait faire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Nous introduirons une classe très utile de sous espaces hilbertiens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ $(s \in \mathbb{R})$. Dans la deuxième partie, nous utiliserons ces espaces de distributions pour résoudre diverses equations aux dérivées partielles: L'équation de Laplace,

Résumé

Après une présentation des propriétés de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide et des diverses opérations que l'on peut y effectuer (differentiation, convolution, transformation de Fourier...), on introduira l'espace dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées. Nous montrerons comment tous les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, les fonctions (ou mesures) à croissance lente (i.e. au plus polynomiale) "s'injectent" dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Par un procédé général de transposition, nous montrerons aussi comment nous pouvons étendre à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ toutes les opérations que l'on sait faire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Nous introduirons une classe très utile de sous espaces hilbertiens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ $(s \in \mathbb{R})$. Dans la deuxième partie, nous utiliserons ces espaces de distributions pour résoudre diverses equations aux dérivées partielles: L'équation de Laplace, l'integrale de Poisson (relèvement harmonique),

Résumé

Après une présentation des propriétés de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide et des diverses opérations que l'on peut y effectuer (differentiation, convolution, transformation de Fourier...), on introduira l'espace dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées. Nous montrerons comment tous les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, les fonctions (ou mesures) à croissance lente (i.e. au plus polynomiale) "s'injectent" dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Par un procédé général de transposition, nous montrerons aussi comment nous pouvons étendre à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ toutes les opérations que l'on sait faire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Nous introduirons une classe très utile de sous espaces hilbertiens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ $(s \in \mathbb{R})$. Dans la deuxième partie, nous utiliserons ces espaces de distributions pour résoudre diverses equations aux dérivées partielles: L'équation de Laplace, l'integrale de Poisson (relèvement harmonique), l'équation de la chaleur,

Résumé

Après une présentation des propriétés de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide et des diverses opérations que l'on peut y effectuer (differentiation, convolution, transformation de Fourier...), on introduira l'espace dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées. Nous montrerons comment tous les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, les fonctions (ou mesures) à croissance lente (i.e. au plus polynomiale) "s'injectent" dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Par un procédé général de transposition, nous montrerons aussi comment nous pouvons étendre à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ toutes les opérations que l'on sait faire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Nous introduirons une classe très utile de sous espaces hilbertiens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ $(s \in \mathbb{R})$. Dans la deuxième partie, nous utiliserons ces espaces de distributions pour résoudre diverses equations aux dérivées partielles: L'équation de Laplace, l'integrale de Poisson (relèvement harmonique), l'équation de la chaleur, l'équation de Schrödinger

Résumé

Après une présentation des propriétés de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ à décroissance rapide et des diverses opérations que l'on peut y effectuer (differentiation, convolution, transformation de Fourier...), on introduira l'espace dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées. Nous montrerons comment tous les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, les fonctions (ou mesures) à croissance lente (i.e. au plus polynomiale) "s'injectent" dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Par un procédé général de transposition, nous montrerons aussi comment nous pouvons étendre à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ toutes les opérations que l'on sait faire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Nous introduirons une classe très utile de sous espaces hilbertiens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ $(s \in \mathbb{R})$. Dans la deuxième partie, nous utiliserons ces espaces de distributions pour résoudre diverses equations aux dérivées partielles: L'équation de Laplace, l'integrale de Poisson (relèvement harmonique), l'équation de la chaleur, l'équation de Schrödinger puis celle des ondes.

Reférences

Nous ne ferons pas toutes demonstrations. Les détails peuvent se trouver par exemple dans l'un des ouvrages suivants:

Reférences

Nous ne ferons pas toutes demonstrations. Les détails peuvent se trouver par exemple dans l'un des ouvrages suivants:

- Jeffrey Rauch: *Partial Differential equations*. Springer, 1991.

Reférences

Nous ne ferons pas toutes demonstrations. Les détails peuvent se trouver par exemple dans l'un des ouvrages suivants:

- Jeffrey Rauch: *Partial Differential equations*. Springer, 1991.
- Jean-Michel Bony. *Cours d'analyse: Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Les Editions de l'Ecole polytechnique, 2001.

Reférences

Nous ne ferons pas toutes demonstrations. Les détails peuvent se trouver par exemple dans l'un des ouvrages suivants:

- Jeffrey Rauch: *Partial Differential equations*. Springer, 1991.
- Jean-Michel Bony. *Cours d'analyse: Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Les Editions de l'Ecole polytechnique, 2001.
- Robert S. Strichartz. *A guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*. World Scientific, 2003.

Une algèbre de convolution

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx,\ \ f \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

$$f * g : x \in \mathbb{R}^N \to \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} .$$

Une algèbre de convolution

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx,\ \ f \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

$$f * g : x \in \mathbb{R}^N \to \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (est commutatif et associatif mais) n'a *pas* d'élément neutre.

Approximation de l'unité

Soit $\varphi \in L^1_+(\mathbb{R}^N)$ d'intégrale égale à 1 et

$$\varphi_k : x \in \mathbb{R}^N \to k^N \varphi(kx).$$

Approximation de l'unité

Soit $\varphi \in L^1_+(\mathbb{R}^N)$ d'intégrale égale à 1 et

$$\varphi_k : x \in \mathbb{R}^N \to k^N \varphi(kx).$$

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$

$$\|\varphi_k * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to 0 \text{ quand } k \to \infty.$$

Approximation de l'unité

Soit $\varphi \in L^1_+(\mathbb{R}^N)$ d'intégrale égale à 1 et

$$\varphi_k : x \in \mathbb{R}^N \to k^N \varphi(kx).$$

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$

$$\|\varphi_k * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to 0 \text{ quand } k \to \infty.$$

Si φ est de classe C^∞ et à *support compact* alors on dit que la suite $\{\varphi_k\}$ est *régularisante*.

Approximation de l'unité

Soit $\varphi \in L^1_+(\mathbb{R}^N)$ d'intégrale égale à 1 et

$$\varphi_k : x \in \mathbb{R}^N \to k^N \varphi(kx).$$

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$

$$\|\varphi_k * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to 0 \text{ quand } k \to \infty.$$

Si φ est de classe C^∞ et à *support compact* alors on dit que la suite $\{\varphi_k\}$ est *régularisante*. En effet, elle permet de montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (l'espace des fonctions de classe C^∞ et à supports compacts) est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Approximation de l'unité

Soit $\varphi \in L^1_+(\mathbb{R}^N)$ d'intégrale égale à 1 et

$$\varphi_k : x \in \mathbb{R}^N \to k^N \varphi(kx).$$

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$

$$\|\varphi_k * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to 0 \text{ quand } k \to \infty.$$

Si φ est de classe C^∞ et à *support compact* alors on dit que la suite $\{\varphi_k\}$ est *régularisante*. En effet, elle permet de montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (l'espace des fonctions de classe C^∞ et à supports compacts) est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. (On peut montrer de manière analogue que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans tous les espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p < \infty)$.)

Une fonction indéfiniment différentiable à support compact

La fonction

$$\varphi : x \in \mathbb{R}^N \longrightarrow \begin{array}{c} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} \text{ si } |x| < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array}$$

est $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et à support dans la boule unité.

La transformation de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

$$\widehat{f} : \zeta \in \mathbb{R}^N \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix.\zeta} f(x) dx$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

$$\widehat{f} : \zeta \in \mathbb{R}^N \to \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix.\zeta} f(x) dx$$

On vérifie que $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ (l'espace des fonctions continues tendant vers zero à l'infini); c'est le Lemme de **Riemann Lebesgue**.

La transformation de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

$$\widehat{f} : \zeta \in \mathbb{R}^N \to \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix.\zeta} f(x) dx$$

On vérifie que $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ (l'espace des fonctions continues tendant vers zero à l'infini); c'est le Lemme de **Riemann Lebesgue**. On vérifie aussi que si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors

$$\widehat{f * g}(\zeta) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{f}(\zeta) \widehat{g}(\zeta).$$

Deux extensions possibles

La transformation de Fourier s'étend à d'autres espaces que $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Deux extensions possibles

La transformation de Fourier s'étend à d'autres espaces que $L^1(\mathbb{R}^N)$. La démarche consiste à partir de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions C^∞ à *décroissance rapide* à l'infini qui est un sous espace de $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Deux extensions possibles

La transformation de Fourier s'étend à d'autres espaces que $L^1(\mathbb{R}^N)$. La démarche consiste à partir de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions C^∞ à *décroissance rapide* à l'infini qui est un sous espace de $L^1(\mathbb{R}^N)$. On pourra soit procéder par *densité* et définir la transformation de Fourier dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^N)$ qui a la propriété importante d'être une transformation *unitaire*,

Deux extensions possibles

La transformation de Fourier s'étend à d'autres espaces que $L^1(\mathbb{R}^N)$. La démarche consiste à partir de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions C^∞ à *décroissance rapide* à l'infini qui est un sous espace de $L^1(\mathbb{R}^N)$. On pourra soit procéder par *densité* et définir la transformation de Fourier dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^N)$ qui a la propriété importante d'être une transformation *unitaire*, soit procéder par *dualité* et obtenir une extension beaucoup plus large de la transformation de Fourier à l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des *distributions tempérées* qui joue un role essentiel dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Les multi-indices

- Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^n$ (un *multi-indice*)

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

Les multi-indices

- Pour tout $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^n$ (un *multi-indice*)

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j .$$

- $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!.$

Les multi-indices

- Pour tout $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^n$ (un *multi-indice*)

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

- $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!$.
- Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on pose

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}.$$

Les multi-indices

- Pour tout $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^n$ (un *multi-indice*)

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

- $\alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!.$
- Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on pose

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}.$$

- Pour $f \in C^\infty$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on pose

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

La formule de Leibnitz

On rappelle la formule de dérivation d'un produit

$$\partial^\alpha(\varphi\psi) = \sum_{\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta \partial^\beta(\varphi)\partial^{\alpha-\beta}(\psi)$$

$(\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n)$ où $\beta \leq \alpha$ signifie $\beta_j \leq \alpha_j$ $\forall j$ et

$$C_\alpha^\beta = \Pi_{j=1}^n C_{\alpha_j}^{\beta_j} = \Pi_{j=1}^n \frac{\alpha_j!}{(\alpha_j - \beta_j)!\beta_j!}.$$

L'espace de Schwartz

L'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| < \infty\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

On vérifie que $\forall k \in \mathbb{N}$ il existe $c > 0$

$$c(1+|x|^2)^k \leq \sup_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|^2 \leq (1+|x|^2)^k \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

On vérifie que $\forall k \in \mathbb{N}$ il existe $c > 0$

$$c(1+|x|^2)^k \leq \sup_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|^2 \leq (1+|x|^2)^k \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

et donc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est aussi défini par

$$\left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k \left|\partial^\beta f(x)\right| < \infty\ \forall \beta \in \mathbb{N}^n,\ \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

La topologie de l'espace de Schwartz

On munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la famille de seminormes

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n).$$

On peut montrer que

$$(f,g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to d(f,g) = \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n} 2^{-|\alpha|-|\beta|} \frac{\|f-g\|_{\alpha,\beta}}{1+\|f-g\|_{\alpha,\beta}}$$

est une **distance** sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Une suite $(f_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge vers $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour cette distance est *équivalent* à

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \ \|f_j - f\|_{\alpha,\beta} \to 0 \ (j \to +\infty)$$

Une suite $(f_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge vers $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour cette distance est *équivalent* à

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \ \|f_j - f\|_{\alpha,\beta} \to 0 \ (j \to +\infty)$$

De plus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ muni de cette distance est *complet*. (On dit alors que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est *un espace de Frechet.)*

Premiers exemples

- $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Premiers exemples

- $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$
- $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $e^{-(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

Premiers exemples

- $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$
- $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $e^{-(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$
- $(1+|x|^2)^{-c} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\ \forall c$

Remarque

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in [1, +\infty] ,$$

Remarque

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \;\; \forall p \in [1, +\infty],$$

car pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $c_k > 0$ tel que

$$|f(x)| \leq \frac{c_k}{(1+|x|^2)^k}, \;\; \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Premières opérations sur l'espace de Schwartz

Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Alors $\varphi\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Alors $\varphi\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. De plus

$$(\varphi, \psi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \varphi\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

est continue.

Soit $M \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *une fonction à croissance lente, i.e.* $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$, $\exists$ $c_1 > 0$, $c_2 > 0$

$$\left|\partial^\beta M(x)\right| \leq c_1(1 + |x|^{c_2}) \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Soit $M \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *une fonction à croissance lente, i.e.* $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$, $\exists$ $c_1 > 0$, $c_2 > 0$

$$\left|\partial^\beta M(x)\right| \leq c_1(1 + |x|^{c_2}) \; \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Alors $M\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et l'application

$$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to M\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

est continue.

Soit $M \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *une fonction à croissance lente, i.e.* $\forall \beta \in \mathbb{N}^n$, $\exists$ $c_1 > 0$, $c_2 > 0$

$$\left|\partial^\beta M(x)\right| \leq c_1(1 + |x|^{c_2}) \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Alors $M\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et l'application

$$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to M\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

est continue.
(Notons qu'un monôme $M(x) = x^\alpha$ est une *fonction à croissance lente).*

Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, l'application

$$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \partial^\beta \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

est continue.

Theorem

On pose $D_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$ *et* $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_N^{\alpha_N}$ *où* α *est un multiindice. Soit* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Alors* $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *et*

$$D_\zeta^\alpha \widehat{\varphi} = \widehat{(-x)^\alpha \varphi}, \quad \widehat{D_x^\alpha \varphi} = \zeta^\alpha \widehat{\varphi}(\zeta).$$

Un isomorphisme de l'espace de Schwartz

Theorem

La transformation de Fourier

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

est bijective et bicontinue.

Un isomorphisme de l'espace de Schwartz

Theorem

La transformation de Fourier

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

est bijective et bicontinue. Sa réciproque est donnée par

$$\mathcal{F}^{-1}g = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int e^{ix.\zeta} g(\zeta) d\zeta \quad (g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)).$$

Theorem

Si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *alors* $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Theorem

Si $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *alors* $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *De plus l'application*

$$L : \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

est continue.

La gaussienne

Theorem

Soit $\varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. *Alors* $\widehat{\varphi}(\zeta) = e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}}$.

Preuve

Le cas $n = 1$.

Preuve

Le cas $n = 1$. On a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, i.e.

$$D_x\varphi = (-i)(-x)\varphi(x)$$

Preuve

Le cas $n = 1$. On a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, i.e.

$$D_x \varphi = (-i)(-x)\varphi(x)$$

dont la transformation de Fourier donne

$$\zeta\widehat{\varphi}(\zeta) = (-i)D_\zeta\widehat{\varphi}(\zeta) = (-i)^2\widehat{\varphi}'(\zeta) = -\widehat{\varphi}'(\zeta).$$

Preuve

Le cas $n = 1$. On a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, i.e.

$$D_x \varphi = (-i)(-x)\varphi(x)$$

dont la transformation de Fourier donne

$$\zeta\widehat{\varphi}(\zeta) = (-i)D_\zeta\widehat{\varphi}(\zeta) = (-i)^2\widehat{\varphi}'(\zeta) = -\widehat{\varphi}'(\zeta).$$

Donc que $\widehat{\varphi}$ verifie la même équation (linéaire du premier ordre) que φ et $\widehat{\varphi}(\zeta) = ce^{-\frac{|\zeta|^2}{2}}$.

Le cas $n = 1$. On a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, i.e.

$$D_x\varphi = (-i)(-x)\varphi(x)$$

dont la transformation de Fourier donne

$$\zeta\widehat{\varphi}(\zeta) = (-i)D_\zeta\widehat{\varphi}(\zeta) = (-i)^2\widehat{\varphi}'(\zeta) = -\widehat{\varphi}'(\zeta).$$

Donc que $\widehat{\varphi}$ verifie la même équation (linéaire du premier ordre) que φ et $\widehat{\varphi}(\zeta) = ce^{-\frac{|\zeta|^2}{2}}$. Or $\widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{|x|^2}{2}}dx = 1$ (intégrale de Gauss) d'où $c = 1$ et $\widehat{\varphi}(\zeta) = e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}}$.

La dimension supérieure $n > 1$ s'en déduit facilement puisque

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(\zeta) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N} \int e^{-\sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{2}} e^{-i\sum_{j=1}^N \zeta_j x_j} dx_1 ... dx_N \\
&= \Pi_{j=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{x_j^2}{2}} e^{-i\zeta_j x_j} dx_j\right) = \Pi_{j=1}^N e^{-\frac{\zeta_j^2}{2}} = e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Autres opérations

Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$

$$\sigma_\lambda f : x \in \mathbb{R}^n \to f(\lambda x), \text{ (dilatation de } \lambda \in \mathbb{R})$$

$$\tau_h f : x \in \mathbb{R}^n \to f(x-h) \text{ (translation de } \lambda \in \mathbb{R}^n)$$

Theorem

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
(i) $\mathcal{F}(\tau_h f) = e^{-ih.\zeta}\mathcal{F}f = e^{-ih.\zeta}\,\widehat{f}(\zeta)$
(ii) $\mathcal{F}(e^{ih.x}f) = \tau_h\mathcal{F}f = \widehat{f}(\zeta - h)$
(iii) $\mathcal{F}(\sigma_\lambda f) = |\lambda|^{-n}\sigma_{\frac{1}{\lambda}}\mathcal{F}(f) = |\lambda|^{-n}\widehat{f}(\frac{\zeta}{\lambda})$.

En exploitant le fait que $e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ est sa *propre* transformée de Fourier on tire:

Corollary

$$\widehat{e^{-a|x|^2}} = \widehat{e^{-\frac{\left|\sqrt{2a}x\right|^2}{2}}} = \sqrt{2a}^{-n} e^{-\frac{\left|\frac{\zeta}{\sqrt{2a}}\right|^2}{2}} = \frac{1}{(2a)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\zeta|^2}{4a}}.$$

Une transformation unitaire

Theorem

La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *s'étend de manière unique en transformation unitaire de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *sur lui même. (En notant encore par* $\mathcal{F}$ *cette extension, on a* $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^* = Id$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$*.)*

Une transformation unitaire

Theorem

La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *s'étend de manière unique en transformation unitaire de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *sur lui même. (En notant encore par* $\mathcal{F}$ *cette extension, on a* $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^* = Id$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$*.)*

On appelera transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ l'extension de $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ à $L^2(\mathbb{R}^N)$ donnée par ce théorème.

Une transformation unitaire

Theorem

La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *s'étend de manière unique en transformation unitaire de* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *sur lui même. (En notant encore par* $\mathcal{F}$ *cette extension, on a* $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^* = Id$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$*.)*

On appelera transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ l'extension de $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ à $L^2(\mathbb{R}^N)$ donnée par ce théorème. (On notera que pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ on *ne* calcule pas $\mathcal{F}f$ par la formule habituelle pour une fonction de $L^1(\mathbb{R}^N)$ car $L^2(\mathbb{R}^N)$ n'est *pas* inclus dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.)

Les distributions tempérées

Si T est une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on notera

$$\langle T, \varphi \rangle$$

(au lieu de $T(\varphi)$) l'action de T sur $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Si T est une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on notera

$$\langle T, \varphi \rangle$$

(au lieu de $T(\varphi)$) l'action de T sur $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definition

Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des distributions tempérées.

Critère de continuité

Theorem

Une forme linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continue (i.e. est une distribution tempérée) si et seulement si il existe un entier p et une constante $c > 0$ tels que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq c \sum_{|\alpha|\leq p,\ |\beta|\leq p} \|\varphi\|_{\alpha,\beta}\,,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Critère de continuité

Theorem

Une forme linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continue (i.e. est une distribution tempérée) si et seulement si il existe un entier p et une constante $c > 0$ tels que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq p,\ |\beta| \leq p} \|\varphi\|_{\alpha,\beta}\,,\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Remarque: On peut remplacer les seminormes $\|\varphi\|_{\alpha,\beta}$ par les seminormes

$$\|\varphi\|_{k,\beta} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k \left| \partial^\beta \varphi(x) \right|.$$

L'exemple fondamental

Rappelons d'abord le résultat utile suivant:

Theorem

Soit $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *tel que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)dx = 0 \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Alors $f = 0$ *presque partout.*

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mesurable telle qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)|\, dx}{(1+|x|^2)^M} < \infty.$$

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mesurable telle qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)|\, dx}{(1+|x|^2)^M} < \infty.$$

On définit alors une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ par

$$T_f : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) f(x) dx.$$

Comme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x) f(x)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^M \frac{|\varphi(x) f(x)|}{(1+|x|^2)^M} dx \\ &\leq \Big(\int \frac{|f(x)|\, dx}{(1+|x|^2)^M}\Big) \sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1+|x|^2)^M\, |\varphi(x)|\end{aligned}$$

alors T_f est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, i.e.

$$T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

Quand on dit d'une *fonction* mesurable f sur $\mathbb{R}^N$ que c'est une distribution tempérée, il faut *comprendre* que

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) f(x) dx$$

définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

On identifie ou pas ?

Quand on dit d'une *fonction* mesurable f sur $\mathbb{R}^N$ que c'est une distribution tempérée, il faut *comprendre* que

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) f(x) dx$$

définit une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Mais se pose alors une question clé: Est-ce que deux fonctions *distinctes* f et g peuvent définir la même distribution, i.e. $T_f = T_g$?

Notons que $T_f = T_g$ signifie

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) g(x) dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)(f(x) - g(x)) dx = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

et donc (par un résultat rappelé plus haut) $f(x) - g(x) = 0$ *presque partout*.

Notons que $T_f = T_g$ signifie

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) g(x) dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)(f(x) - g(x)) dx = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

et donc (par un résultat rappelé plus haut) $f(x) - g(x) = 0$ *presque partout*. Ainsi les (*classes* de) fonctions f et g sont égales. Il n' y a donc pas d'ambiguité à **identifier** une (classe de) fonction f et la distribution tempérée associée T_f.

Injection des espaces de Lebesgue

La condition

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)|\,dx}{(1+|x|^2)^M} < \infty$$

pour un certain $M \geq 0$ couvre de nombreux espaces fonctionnels.

- Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors cette condition est satisfaite avec $M = 0$.

- Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors cette condition est satisfaite avec $M = 0$.
- Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 < p < \infty$ alors la condition est satisfaite si $\frac{1}{(1+|x|^2)^M} \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ où p' est l'exposant conjugué de p (défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Or $\frac{1}{(1+|x|^2)^M} \in L^{p'}$ si $2Mp' > N$.

- Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors cette condition est satisfaite avec $M = 0$.
- Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 < p < \infty$ alors la condition est satisfaite si $\frac{1}{(1+|x|^2)^M} \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ où p' est l'exposant conjugué de p (défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Or $\frac{1}{(1+|x|^2)^M} \in L^{p'}$ si $2Mp' > N$.
- Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, la condtion est satisfaite si $\frac{1}{(1+|x|^2)^M} \in L^1$ i.e. si $2M > N$.

- Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors cette condition est satisfaite avec $M = 0$.
- Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 < p < \infty$ alors la condition est satisfaite si $\frac{1}{(1+|x|^2)^M} \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ où p' est l'exposant conjugué de p (défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Or $\frac{1}{(1+|x|^2)^M} \in L^{p'}$ si $2Mp' > N$.
- Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, la condtion est satisfaite si $\frac{1}{(1+|x|^2)^M} \in L^1$ i.e. si $2M > N$.

- Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors cette condition est satisfaite avec $M = 0$.
- Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 < p < \infty$ alors la condition est satisfaite si $\frac{1}{(1+|x|^2)^M} \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ où p' est l'exposant conjugué de p (défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Or $\frac{1}{(1+|x|^2)^M} \in L^{p'}$ si $2Mp' > N$.
- Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, la condtion est satisfaite si $\frac{1}{(1+|x|^2)^M} \in L^1$ i.e. si $2M > N$.

Ainsi, tous les espaces (de fonctions) $L^p(\mathbb{R}^N)$ ($p \in [1, \infty]$) **s'injectent** dans l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées.

La masse de Dirac

Pour tout $a \in \mathbb{R}^N$ la forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\delta_a : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \varphi(a)$$

s'appelle la masse de Dirac au point a.

Comme

$$|\langle \delta_a, \varphi \rangle| = |\varphi(a)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi(x)| = \|\varphi\|_{0,0} \, ,$$

alors δ_a est continue, i.e. $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Comme

$$|\langle \delta_a, \varphi \rangle| = |\varphi(a)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi(x)| = \|\varphi\|_{0,0} \,,$$

alors δ_a est continue, i.e. $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
(La masse de Dirac à l'origine est souvent notée δ.)

Il n'existe pas de fonction mesurable f telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) f(x) dx = \varphi(a), \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Il n'existe pas de fonction mesurable f telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)f(x)dx = \varphi(a),\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

On exprime cela en disant que δ_a **n'est pas** une fonction.

Il n'existe pas de fonction mesurable f telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) f(x) dx = \varphi(a), \; \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

On exprime cela en disant que δ_a **n'est pas** une fonction. Il s'agit en l'occurence d'une **mesure**.

Il n'existe pas de fonction mesurable f telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) f(x) dx = \varphi(a), \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

On exprime cela en disant que δ_a **n'est pas** une fonction. Il s'agit en l'occurence d'une **mesure**. Les fonctions à croissance lente sont aussi des mesures particulières (absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue).

Topologie de la convergence simple

Definition

Soit $(T_j) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. On dira que $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle T_j, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \text{ quand } j \to \infty.$$

Il faut retenir qu'une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *agit* sur une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (dite aussi **fonction test**) et que cette action est symbolisée par un crochet $\langle T, \varphi \rangle$.

Il faut retenir qu'une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *agit* sur une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (dite aussi **fonction test**) et que cette action est symbolisée par un crochet $\langle T, \varphi \rangle$. Dans le cas particulier où T est "une fonction $T(x)$", on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) T(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

La notion de convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est consistante avec celles des espaces fonctionnels que l'on a *injectés* dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Soit par exemple une suite $(T_j) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ telle que $T_j \to T$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Alors $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Soit par exemple une suite $(T_j) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ telle que $T_j \to T$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Alors $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}
|\langle T_j, \varphi\rangle - \langle T, \varphi\rangle| &= |\langle T_j - T, \varphi\rangle| = \left|\int (T_j(x) - T(x))\varphi(x)dx\right| \\
&\leq \int |T_j(x) - T(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \\
&\leq \|T_j - T\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\,\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \to 0.
\end{aligned}$$

Soit par exemple une suite $(T_j) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ telle que $T_j \to T$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Alors $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} |\langle T_j, \varphi\rangle - \langle T, \varphi\rangle| &= |\langle T_j - T, \varphi\rangle| = \left|\int (T_j(x) - T(x))\varphi(x)dx\right| \\ &\leq \int |T_j(x) - T(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \\ &\leq \|T_j - T\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\,\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \to 0. \end{aligned}$$

C'est même vrai des *convergences faibles* dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \leq p < \infty)$ et de la convergence *faible étoile* dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Un résultat de densité

Theorem

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. *Alors il existe une suite de fonctions* $(T_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *telle que* $T_j \to T$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, *i.e.* $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ $\langle T_j, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ *quand* $j \to \infty$ *ou, plus précisément,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) T_j(x) dx \to \langle T, \varphi \rangle.$$

Exercice

Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, positive telle $\int h = 1$ et $h_j : x \in \mathbb{R}^N \to j^N h(jx)$. Montrer que

$$h_j \to \delta \ \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

La transposition et son utilisation

Soit

$$L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

une application linéaire continue.

La transposition et son utilisation

Soit

$$L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

une application linéaire continue. On appelle *transposée* de L l'application

$$L' : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$$

définie par

$$\langle L'T, \varphi \rangle = \langle T, L\varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Avant d'énoncer **le résultat fondamental**, rappelons que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ contient $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ au sens où tout elément $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est identifié à la distribution tempérée

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\psi(x)dx.$$

Theorem

Soit

$$L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

une application linéaire continue.

Theorem

Soit

$$L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

une application linéaire continue. On suppose que la transposée

$$L' : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$$

laisse invariant le sous espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *(i.e.* $L'T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *si* $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$*) et, de plus* $L' : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *est continue (pour la topologie de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$*).*

Theorem

Soit

$$L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

une application linéaire continue. On suppose que la transposée

$$L' : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$$

laisse invariant le sous espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (i.e. $L'T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$) et, de plus $L' : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est continue (pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$). Alors L admet une unique extension séquentiellement continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dans lui même.

Theorem

Soit

$$L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

une application linéaire continue. On suppose que la transposée

$$L' : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$$

laisse invariant le sous espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (i.e. $L'T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$) et, de plus $L' : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est continue (pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$). Alors L admet une unique extension séquentiellement continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dans lui même. Cette extension est donnée par

$$\langle LT, \varphi\rangle = \langle T, L'\varphi\rangle, \ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Preuve

On part de la formule

$$\langle L'T, \psi \rangle = \langle T, L\psi \rangle, \ \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Preuve

On part de la formule

$$\langle L'T, \psi \rangle = \langle T, L\psi \rangle, \ \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Comme $L' : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ laisse invariant $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on remplace T par $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle L\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, L'\varphi \rangle; \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Preuve

On part de la formule

$$\langle L'T, \psi\rangle = \langle T, L\psi\rangle,\ \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Comme $L' : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ laisse invariant $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on remplace T par $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle L\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, L'\varphi\rangle; \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Soit $\widetilde{L}$ une éventuelle extension de L avec les propriétés ci-dessus.

Preuve

On part de la formule

$$\langle L'T, \psi\rangle = \langle T, L\psi\rangle,\ \forall\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Comme $L' : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ laisse invariant $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on remplace T par $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle L\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, L'\varphi\rangle; \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Soit $\widetilde{L}$ une éventuelle extension de L avec les propriétés ci-dessus. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est séquentiellement dense dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, il existe $(T_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $T_j \longrightarrow T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. On a donc

$$\langle LT_j, \varphi\rangle = \langle T_j, L'\varphi\rangle,\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

et en passant à la limite quand $j \longrightarrow \infty$ on devrait avoir

$$\langle \widetilde{L}T, \varphi\rangle = \langle T, L'\varphi\rangle,\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

L'application $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \langle T, L'\varphi \rangle$ est bien linéaire et continue car L' est par hypothèse continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Cela définit $\widetilde{L}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

L'application $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \langle T, L'\varphi \rangle$ est bien linéaire et continue car L' est par hypothèse continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Cela définit $\widetilde{L}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Montrons que

$$\widetilde{L} : T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \widetilde{L}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$$

est séquentiellement continue, i.e. $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ implique $\widetilde{L}T_j \to \widetilde{L}T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. On a

$$\langle \widetilde{L}T_j, \varphi \rangle = \langle T_j, L'\varphi \rangle \to \langle T, L'\varphi \rangle = \langle \widetilde{L}T, \varphi \rangle$$

donc $\widetilde{L}T_j \to \widetilde{L}T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. ■

Opérations sur les distributions

Theorem

Les opérations $M, \partial^\alpha, \tau_h, \sigma_k$ et $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans lui même ont des uniques extensions séquentiellement continues de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dans lui même définies par:

Opérations sur les distributions

Theorem

Les opérations $M, \partial^\alpha, \tau_h, \sigma_k$ et $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans lui même ont des uniques extensions séquentiellement continues de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dans lui même définies par:

$$\langle MT, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, M\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}},, \ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

Opérations sur les distributions

Theorem

Les opérations $M, \partial^\alpha, \tau_h, \sigma_k$ *et* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *dans lui même ont des uniques extensions séquentiellement continues de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *dans lui même définies par:*

$$\langle MT, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, M\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}},,\ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\ ,\ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

Opérations sur les distributions

Theorem

Les opérations $M, \partial^\alpha, \tau_h, \sigma_k$ *et* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *dans lui même ont des uniques extensions séquentiellement continues de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *dans lui même définies par:*

$$\langle MT, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, M\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}},, \ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \ , \ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

$$\langle \tau_h T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \tau_{-h}\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \ , \ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

Opérations sur les distributions

Theorem

Les opérations $M, \partial^\alpha, \tau_h, \sigma_k$ *et* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *dans lui même ont des uniques extensions séquentiellement continues de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *dans lui même définies par:*

$$\langle MT, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, M\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}},,\ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\ ,\ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

$$\langle \tau_h T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \tau_{-h}\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\ ,\ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

$$\langle \sigma_k T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, k^{-N}\sigma_{\frac{1}{k}}\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\ ,\ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

Theorem

Les opérations $M, \partial^\alpha, \tau_h, \sigma_k$ *et* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *dans lui même ont des uniques extensions séquentiellement continues de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *dans lui même définies par:*

$$\langle MT, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, M\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}},, \;\; T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\;\; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \;, \;\; T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\;\; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

$$\langle \tau_h T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \tau_{-h}\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \;, \;\; T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\;\; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

$$\langle \sigma_k T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, k^{-N}\sigma_{\frac{1}{k}}\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \;, \;\; T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\;\; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

$$\langle \mathcal{F} T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \;, \;\; T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\;\; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

Opérations sur les distributions

Theorem

Les opérations $M, \partial^\alpha, \tau_h, \sigma_k$ et $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dans lui même ont des uniques extensions séquentiellement continues de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dans lui même définies par:

$$\langle MT, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, M\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}},, \ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}, \ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

$$\langle \tau_h T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \tau_{-h}\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}, \ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

$$\langle \sigma_k T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, k^{-N}\sigma_{\frac{1}{k}}\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}, \ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

$$\langle \mathcal{F} T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}, \ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

Supposons que $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Comme

$$\begin{aligned}
\langle M'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \langle T, M\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int T(x)(M\varphi)(x)dx \\
&= \int T(x)\left[M(x)\varphi(x)\right]dx \\
&= \int \left[T(x)M(x)\right]\varphi(x)dx = \langle MT, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}
\end{aligned}$$

Multiplication par une fonction à croissance lente

Supposons que $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Comme

$$\begin{aligned}
\langle M'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \langle T, M\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int T(x)(M\varphi)(x)dx \\
&= \int T(x)\left[M(x)\varphi(x)\right]dx \\
&= \int \left[T(x)M(x)\right]\varphi(x)dx = \langle MT, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}
\end{aligned}$$

on voit que si $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ alors $M'T = MT$.

Donc la restriction de M' à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ n'est rien d'autre que l'opération M (dont on sait qu'elle est continue pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$).

Donc la restriction de M' à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ n'est rien d'autre que l'opération M (dont on sait qu'elle est continue pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$). Ainsi, on étend l'opération M aux distributions tempérées par

$$\langle MT, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, M'\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, M\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}, \; T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

La dérivation

Supposons que $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Soit $L = \partial^\alpha$. On a

$$\begin{aligned}\langle L'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \langle T, L\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\ &= \int T(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx.\end{aligned}$$

Une integration par parties $|\alpha|$ fois donne

$$\begin{aligned} \int T(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx &= \int(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha T(x)\varphi(x)dx \\ &= \langle(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha T,\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \end{aligned}$$

d'où $\langle L'T,\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha T,\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ montrant que $L'T = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha T$ lorsque $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Une integration par parties $|\alpha|$ fois donne

$$\begin{aligned}\int T(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx &= \int(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha T(x)\varphi(x)dx \\ &= \langle(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha T,\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\end{aligned}$$

d'où $\langle L'T,\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha T,\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ montrant que $L'T = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha T$ lorsque $T\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Ainsi la restriction de L' à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ n'est rien d'autre que la dérivation ∂^α (au facteur multiplicatif près $(-1)^{|\alpha|}$) dont on sait qu'elle est continue pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

La translation

Supposons que $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Soit $L = \tau_h$. On a

$$\begin{aligned}
\langle L'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \langle T, L\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \tau_h\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\
&= \int T(x)\varphi(x-h)dx = \int T(y+h)\varphi(y)dy = \langle \tau_{-h}T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'}
\end{aligned}$$

d'où $\langle L'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \tau_{-h}T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ montrant que $L'T = \tau_{-h}T$ lorsque $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

La translation

Supposons que $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Soit $L = \tau_h$. On a

$$\begin{aligned}\langle L'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \langle T, L\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \tau_h\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\ &= \int T(x)\varphi(x-h)dx = \int T(y+h)\varphi(y)dy = \langle \tau_{-h}T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}'}\end{aligned}$$

d'où $\langle L'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \tau_{-h}T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ montrant que $L'T = \tau_{-h}T$ lorsque $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Ainsi la restriction de L' à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ n'est rien d'autre que la translation τ_{-h} dont on sait qu'elle est continue pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

La dilatation

Si $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $L = \sigma_k$ alors

$$\langle L' T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \sigma_k \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int T(x) \sigma_k \varphi(x) dx = \int T(x) \varphi(kx) dx.$$

La dilatation

Si $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $L = \sigma_k$ alors

$$\langle L'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \sigma_k\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int T(x)\sigma_k\varphi(x)dx = \int T(x)\varphi(kx)dx.$$

Or le changement de variable $y = kx$ donne $dy = |k|^N dx$ (k^N est le jacobien de la transformation $x \to kx$) et

$$\int T(x)\varphi(kx)dx = \int |k|^{-N} T(k^{-1}y)\varphi(y)dy.$$

Alors
$$\langle L'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle |k|^{-N}\sigma_{\frac{1}{k}}T, \sigma_k\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$
et donc $\langle L'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle |k|^{-N}\sigma_{\frac{1}{k}}T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ montrant que $L'T = |k|^{-N}\sigma_{\frac{1}{k}}T$ lorsque $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Alors

$$\langle L'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle |k|^{-N}\sigma_{\frac{1}{k}}T, \sigma_k\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

et donc $\langle L'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle |k|^{-N}\sigma_{\frac{1}{k}}T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ montrant que $L'T = |k|^{-N}\sigma_{\frac{1}{k}}T$ lorsque $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Ainsi la restriction de L' à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ n'est rien d'autre que l'opération $|k|^{-N}\sigma_{\frac{1}{k}}$ dont on sait qu'elle est continue pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

La transformation de Fourier

Soit $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $L = \mathcal{F}$ alors

$$\langle L'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int T(x)\mathcal{F}\varphi(x)dx = \int \mathcal{F}T(x)\varphi(x)dx$$

d'où $\langle L'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = [\mathcal{F}T, \varphi] = \langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ ce qui montre que $L'T = \mathcal{F}T$ lorsque $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Soit $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $L = \mathcal{F}$ alors

$$\langle L'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int T(x)\mathcal{F}\varphi(x)dx = \int \mathcal{F}T(x)\varphi(x)dx$$

d'où $\langle L'T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = [\mathcal{F}T, \varphi] = \langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ ce qui montre que $L'T = \mathcal{F}T$ lorsque $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Ainsi la restriction de L' à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ n'est rien d'autre que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ dont on sait qu'elle est continue pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Consistance

Notons que la transformation de Fourier a *déjà* été définie pour des fonctions qui ne sont pas forcément dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, à savoir les fonctions de $L^1(\mathbb{R}^N)$ et celles de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Consistance

Notons que la transformation de Fourier a *déjà* été définie pour des fonctions qui ne sont pas forcément dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, à savoir les fonctions de $L^1(\mathbb{R}^N)$ et celles de $L^2(\mathbb{R}^N)$. En fait, leurs transformations de Fourier *coincident* avec celle des distributions tempérées.

Consistance

Notons que la transformation de Fourier a *déjà* été définie pour des fonctions qui ne sont pas forcément dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, à savoir les fonctions de $L^1(\mathbb{R}^N)$ et celles de $L^2(\mathbb{R}^N)$. En fait, leurs transformations de Fourier *coincident* avec celle des distributions tempérées. Il n'y a donc pas d'ambiguité à parler de la transformation de Fourier d'un élément de $L^1(\mathbb{R}^N)$ ou de $L^2(\mathbb{R}^N)$ que ce dernier soit vu comme une fonction *ou* comme une distribution tempérée.

Consistance

Notons que la transformation de Fourier a *déjà* été définie pour des fonctions qui ne sont pas forcément dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, à savoir les fonctions de $L^1(\mathbb{R}^N)$ et celles de $L^2(\mathbb{R}^N)$. En fait, leurs transformations de Fourier *coincident* avec celle des distributions tempérées. Il n'y a donc pas d'ambiguité à parler de la transformation de Fourier d'un élément de $L^1(\mathbb{R}^N)$ ou de $L^2(\mathbb{R}^N)$ que ce dernier soit vu comme une fonction *ou* comme une distribution tempérée. De même si T est une fonction de classe C^1 et si T définit une distribution tempérée alors ses dérivées partielles usuelles coincident avec ses dérivées partielles distributionnelles.

Consistance

Notons que la transformation de Fourier a *déjà* été définie pour des fonctions qui ne sont pas forcément dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, à savoir les fonctions de $L^1(\mathbb{R}^N)$ et celles de $L^2(\mathbb{R}^N)$. En fait, leurs transformations de Fourier *coincident* avec celle des distributions tempérées. Il n'y a donc pas d'ambiguité à parler de la transformation de Fourier d'un élément de $L^1(\mathbb{R}^N)$ ou de $L^2(\mathbb{R}^N)$ que ce dernier soit vu comme une fonction *ou* comme une distribution tempérée. De même si T est une fonction de classe C^1 et si T définit une distribution tempérée alors ses dérivées partielles usuelles coincident avec ses dérivées partielles distributionnelles. On montre aussi qu'une distribution tempérée dont les dérivées partielles premières sont nulles est une constante.

Autres propriétés

Theorem

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. *Alors:*
(i) $\mathcal{F}(D^\alpha T) = \zeta^\alpha \mathcal{F}(T)$
(ii) $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^* = Id$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$
(iii) $\mathcal{F}(\tau_h T) = e^{ih.\zeta}\mathcal{F}(T)$.

Preuve

(i) On sait que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est séquentiellement dense dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Il existe donc une suite $(T_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Preuve

(i) On sait que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est séquentiellement dense dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Il existe donc une suite $(T_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Or on sait que dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\mathcal{F}(D^\alpha T_j) = \zeta^\alpha \mathcal{F}(T_j).$$

Preuve

(i) On sait que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est séquentiellement dense dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Il existe donc une suite $(T_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Or on sait que dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\mathcal{F}(D^\alpha T_j) = \zeta^\alpha \mathcal{F}(T_j).$$

De plus $D^\alpha T_j \to D^\alpha T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ car la dérivation dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est séquentiellement continue et donc $\mathcal{F}(D^\alpha T_j) \to \mathcal{F}(D^\alpha T)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ car la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est aussi séquentiellement continue.

Preuve

(i) On sait que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est séquentiellement dense dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Il existe donc une suite $(T_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Or on sait que dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\mathcal{F}(D^\alpha T_j) = \zeta^\alpha \mathcal{F}(T_j).$$

De plus $D^\alpha T_j \to D^\alpha T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ car la dérivation dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est séquentiellement continue et donc $\mathcal{F}(D^\alpha T_j) \to \mathcal{F}(D^\alpha T)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ car la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est aussi séquentiellement continue. D'autre part, pour la même raison, $\mathcal{F}(T_j) \to \mathcal{F}(T)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et donc $\zeta^\alpha \mathcal{F}(T_j) \to \zeta^\alpha \mathcal{F}(T)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ car la multiplication par la fonction (à croissance lente) ζ^α est une opération dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ séquentiellement continue.

(ii) On part de l'identité connue dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\mathcal{F}^*(\mathcal{F}T_j) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^*T_j) = T_j$$

et l'on passe à la limite ($j \to \infty$) en utilisant la continuité séquentielle dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des differentes opérations en jeu.

(iii) On part de l'identité connue dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\mathcal{F}(\tau_h T_j) = e^{ih.\zeta}\mathcal{F}(T_j)$$

et l'on passe à la limite ($j \longrightarrow \infty$) en utilisant la continuité séquentielle dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des differentes opérations en jeu. $\blacksquare$

Théorème de structure

Theorem

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$*. Alors il existe une fonction* f *continue et à croissance lente sur* $\mathbb{R}^N$ *et un multi-indice* α *tels que* $T = \partial^\alpha f$*.*

Exemple 1

La fonction égale à 1 partout est (en tant que fonction bornée) une distribution tempérée dont on peut calculer la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Exemple 1

La fonction égale à 1 partout est (en tant que fonction bornée) une distribution tempérée dont on peut calculer la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Par définition, $\mathcal{F}1$ est une distribution tempérée dont l'action sur les fonctions test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est donnée par

$$\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}.$$

Or $\langle 1, \psi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int 1\psi(x)dx = \int \psi(x)dx$ d'où

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \int \widehat{\varphi}(x)dx = \int \widehat{\varphi}(\zeta)d\zeta = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int \widehat{\varphi}(\zeta)d\zeta \right] \\ &= (2\pi)^{\frac{N}{2}} \varphi(0) \end{aligned}$$

d'après la formule de Fourier *inverse*.

Or $\varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ d'où $\langle \mathcal{F}1, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle (2\pi)^{\frac{N}{2}} \delta_0, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ ce qui montre que

$$\mathcal{F}1 = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \delta.$$

Exemple 2

On sait que δ est une distribution tempérée.

Exemple 2

On sait que δ est une distribution tempérée. Par définition

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}\delta, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \langle \delta, \mathcal{F}\varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\
&= \widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int \varphi(x)dx \\
&= \int (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \varphi(x)dx = \langle (2\pi)^{-\frac{N}{2}}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}
\end{aligned}
$$

d'où l'on déduit que $\mathcal{F}\delta = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}$.

Exemple 3

Soit $h \in \mathbb{R}^N$

$$\langle \tau_h \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \tau_{-h} \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi(\cdot + h) \rangle = \varphi(h) = \langle \delta_h, \varphi \rangle$$

où δ_h est la masse de Dirac en h. Donc

$$\tau_h \delta = \delta_h.$$

Exemple 4

La formule

$$\mathcal{F}(\tau_h T) = e^{ih.\zeta}\mathcal{F}(T)$$

donne alors

$$\widehat{\delta_h} = e^{ih.\zeta}\widehat{\delta} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{ih.\zeta}.$$

La fonction d'Heaviside

$$x \in \mathbb{R} \to H(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

C'est une fonction bornée et donc H définit la distribution tempérée

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Cherchons sa dérivée

$$\begin{aligned}\langle H', \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= -\langle H, \varphi'\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \varphi'(x)dx \\ &= -\lim_{a\to+\infty}[\varphi(a)-\varphi(0)] = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\end{aligned}$$

Cherchons sa dérivée

$$
\begin{aligned}
\langle H', \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= -\langle H, \varphi' \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = -\lim_{a \to +\infty} \int_0^a \varphi'(x)dx \\
&= -\lim_{a \to +\infty} [\varphi(a) - \varphi(0)] = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}
\end{aligned}
$$

d'où

$$H' = \delta.$$

Exercices

1) Soit f une fonction à croissance lente, C^1 par morceaux (ayant un nombre fini de discontinuités de première espece). Calculer sa dérivée dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Exercices

1) Soit f une fonction à croissance lente, C^1 par morceaux (ayant un nombre fini de discontinuités de première espece). Calculer sa dérivée dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
2) Montrer que $\langle \delta', \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = -\varphi'(0)$.

Exercices

1) Soit f une fonction à croissance lente, C^1 par morceaux (ayant un nombre fini de discontinuités de première espece). Calculer sa dérivée dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
2) Montrer que $\langle \delta', \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = -\varphi'(0)$.
3) Montrer que pour toute fonction f de classe C^∞ et à croissance lente dans $\mathbb{R}$ on a $f\delta_a = f(a)\delta_a$.

Exercices

1) Soit f une fonction à croissance lente, C^1 par morceaux (ayant un nombre fini de discontinuités de première espece). Calculer sa dérivée dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
2) Montrer que $\langle \delta', \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = -\varphi'(0)$.
3) Montrer que pour toute fonction f de classe C^∞ et à croissance lente dans $\mathbb{R}$ on a $f\delta_a = f(a)\delta_a$.
4) Montrer que $x\delta' = -\delta$

Une distribution valeur principale de Cauchy

Posons

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Notons que

$$\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx=\int_{\varepsilon\leq|x|\leq\frac{1}{2}}\frac{\varphi(x)}{x}dx+\int_{|x|\geq\frac{1}{2}}\frac{\varphi(x)}{x}dx$$

Notons que

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq\frac{1}{2}} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{|x|\geq\frac{1}{2}} \frac{\varphi(x)}{x}dx$$

et que

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \frac{\varphi(x)}{x}dx &= \int_{\varepsilon\leq|x|\leq\frac{1}{2}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq\frac{1}{2}} \frac{\varphi(0)}{x}dx \\
&= \int_{\varepsilon\leq|x|\leq\frac{1}{2}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx \to \int_{|x|\leq\frac{1}{2}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx.
\end{aligned}$$

Ainsi $\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$ est bien définie et

$$\begin{aligned} \left| \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \right| &\leq \int_{|x| \leq \frac{1}{2}} \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right| dx + 2 \left\| \varphi \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \varphi'(y) \right| + 2 \left\| \varphi \right\|_{L^1(\mathbb{R})} . \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,|\varphi(x)|\,(1+x^2)dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}dx\right) \sup_{y\in\mathbb{R}} \big||\varphi(y)|\,(1+y^2)\big|
\end{aligned}$$

on voit que T est bien continue, i.e.

$$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Comme

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} |\varphi(x)| (1+x^2) dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx \right) \sup_{y\in\mathbb{R}} \left| |\varphi(y)| (1+y^2) \right|\end{aligned}$$

on voit que T est bien continue, i.e.

$$T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Notons que la présence de la seminorme $\sup_{y\in\mathbb{R}} |\varphi'(y)|$ indique que cette distribution n'est *pas* une mesure.

Exercice

Montrer que dans $\mathbb{R}$ la fonction $\ln(|x|)$ est une distribution tempérée et

$$\ln(|x|)' = vp(\frac{1}{x}).$$

Exercice

Montrer que dans $\mathbb{R}$ la fonction $\ln(|x|)$ est une distribution tempérée et

$$\ln(|x|)' = vp(\frac{1}{x}).$$

Montrer aussi que $xvp(\frac{1}{x}) = 1$.

Autre exemple

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{x + i\varepsilon} =$$

Autre exemple

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{x + i\varepsilon} = vp(\frac{1}{x}) - i\pi\delta.$$

Autre exemple

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{x + i\varepsilon} = vp(\frac{1}{x}) - i\pi\delta.$$

En effet, à $\varepsilon > 0$ fixé $\frac{1}{x+i\varepsilon}$ est la dérivée de $\log(x + i\varepsilon)$ où log désigne la determination principale du logarithme, i.e.

$$\log(x + i\varepsilon) = \log|x + i\varepsilon| + iArg(x + i\varepsilon)$$

où $Arg(x + i\varepsilon) \in \left]-\pi, \pi\right[$.

Or

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \log(x + i\varepsilon) = \log|x| + iI(x)$$

où $I(x) = 0$ si $x > 0$, $I(x) = \pi$ si $x < 0$, $I(x) = \frac{\pi}{2}$ si $x = 0$.

Or

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \log(x + i\varepsilon) = \log|x| + iI(x)$$

où $I(x) = 0$ si $x > 0$, $I(x) = \pi$ si $x < 0$, $I(x) = \frac{\pi}{2}$ si $x = 0$. Donc (la dérivation étant *continue* dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$)

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1}{x + i\varepsilon} = \ln(|x|)' + iI' = vp(\frac{1}{x}) - i\pi\delta.$$

Equations sur des distributions

1) L'equation $xf = 0$ a pour unique solution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$f = c\delta$$

où c est une constante.

Equations sur des distributions

1) L'equation $xf = 0$ a pour unique solution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$f = c\delta$$

où c est une constante. En effet, si $f = \delta$

$$\langle xf, \varphi \rangle = \langle f, x\varphi \rangle = (x\varphi)(0) = 0 \ \forall \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Inversement, soit $xf = 0$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi(0) = 1$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\chi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{et } \psi(0) = 0$$

Inversement, soit $xf = 0$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi(0) = 1$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\chi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{et } \psi(0) = 0$$

alors $\widetilde{\psi}$ définie par

$$\widetilde{\psi}(x) := \begin{cases} \frac{\psi(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \psi'(0) \text{ sinon} \end{cases}$$

est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et vérifie $\psi(x) = x\widetilde{\psi}(x)$.

Inversement, soit $xf = 0$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi(0) = 1$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\chi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{et } \psi(0) = 0$$

alors $\widetilde{\psi}$ définie par

$$\widetilde{\psi}(x) := \begin{cases} \frac{\psi(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \psi'(0) \text{ sinon} \end{cases}$$

est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et vérifie $\psi(x) = x\widetilde{\psi}(x)$. Alors

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &= \langle f, \psi + \varphi(0)\chi \rangle = \langle f, x\widetilde{\psi} \rangle + \langle f, \chi \rangle \varphi(0) \\ &= \langle xf, \widetilde{\psi} \rangle + \langle f, \chi \rangle \varphi(0) = \langle f, \chi \rangle \varphi(0) \end{aligned}$$

d'où $f = c\delta \quad (c = \langle f, \chi \rangle)$.

2) L'équation $xf = 1$ a pour unique solution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$f =$$

2) L'équation $xf = 1$ a pour unique solution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$f = vp(\frac{1}{x}) + c\delta.$$

2) L'équation $xf = 1$ a pour unique solution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$f = vp(\frac{1}{x}) + c\delta.$$

En effet, comme $xvp(\frac{1}{x}) = 1$ alors $xf = 1$ équivaut à

$$x(f - vp(\frac{1}{x})) = 0$$

et donc d'après ce qui précéde

$$f - vp(\frac{1}{x}) = c\delta.$$

La formule sommatoire de Poisson et le peigne de Dirac

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et

$$\psi(x) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x - 2\pi k).$$

La formule sommatoire de Poisson et le peigne de Dirac

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et

$$\psi(x) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x - 2\pi k).$$

Comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, cette série ainsi que les séries dérivées *convergent normalement* sur les bornés de $\mathbb{R}$.

La formule sommatoire de Poisson et le peigne de Dirac

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et

$$\psi(x) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x - 2\pi k).$$

Comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, cette série ainsi que les séries dérivées *convergent normalement* sur les bornés de $\mathbb{R}$. Alors $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et est 2π-périodique.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et

$$\psi(x) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(x - 2\pi k).$$

Comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, cette série ainsi que les séries dérivées *convergent normalement* sur les bornés de $\mathbb{R}$. Alors $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et est 2π-périodique. Alors ψ est égale à sa série de Fourier

$$\psi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

où les c_k sont donnés par

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(x)e^{-ikx}dx &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\varphi(x-2\pi k)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-2\pi k}^{-2\pi(k-1)}\varphi(y)e^{-iky}dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{-iky}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\varphi}(k)
\end{aligned}$$

On a

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k) e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

On a

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k) e^{ikx} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

L'évaluation en $x = 0$ donne la *formule sommatoire de Poisson*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2\pi k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k).$$

On peut l'interpréter au sens des distributions tempérées comme

$$\langle \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi k}, \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k, \widehat{\varphi} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \widehat{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k}, \varphi \rangle$$

soit

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\delta_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\zeta}$$

On peut l'interpréter au sens des distributions tempérées comme

$$\langle \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi k}, \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k, \widehat{\varphi} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \widehat{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k}, \varphi \rangle$$

soit

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\delta_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\zeta}$$

que l'on appelle parfois le **peigne de Dirac**.

On peut l'interpréter au sens des distributions tempérées comme

$$\langle \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi k}, \varphi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k, \widehat{\varphi} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle \widehat{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k}, \varphi \rangle$$

soit

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\delta_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\zeta}$$

que l'on appelle parfois le **peigne de Dirac**. Ce résultat s'étend facilement à $\mathbb{R}^N$.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ fixée. Alors l'application

$$L : \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

a une unique extension séquentiellement continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dans lui même définie par

$$\langle \varphi * T, \chi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \widetilde{\varphi} * \chi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \ , \ \ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \ \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

où $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

La convolution

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ fixée. Alors l'application

$$L : \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

a une unique extension séquentiellement continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dans lui même définie par

$$\langle \varphi * T, \chi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \widetilde{\varphi} * \chi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \ , \ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \ \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

où $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. De plus,

$$\widehat{\varphi * T} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{\varphi} \widehat{T}, \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$$

$$\partial^\alpha (\varphi * T) = \partial^\alpha \varphi * T = \varphi * \partial^\alpha T.$$

Preuve

Il faut vérifier que L' laisse invariant le sous espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve

Il faut vérifier que L' laisse invariant le sous espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Par définition, on a pour tout $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle L'T, \chi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, L\chi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \varphi * \chi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}.$$

Preuve

Il faut vérifier que L' laisse invariant le sous espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Par définition, on a pour tout $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle L'T, \chi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, L\chi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \varphi * \chi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}.$$

Si $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ alors

$$\begin{aligned}
\langle L'T, \chi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \int T(x)\left[\int \varphi(x-y)\chi(y)dy\right]dx \\
&= \int \chi(y)\left[\int \varphi(x-y)T(x)dx\right]dy \\
&= \int \chi(y)\left[\int \widetilde{\varphi}(y-x)T(x)dx\right]dy \\
&= \int \chi(y)(\widetilde{\varphi} * T)(y)dy = \langle \widetilde{\varphi} * T, \chi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}
\end{aligned}$$

Cela montre que pour $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $L'T = \widetilde{\varphi} * T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Cela montre que pour $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $L'T = \widetilde{\varphi} * T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Ainsi $L' : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est continue et L admet une unique extension séquentiellement continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dans lui même définie par

$$\langle LT, \chi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \widetilde{\varphi} * \chi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}.$$

Les relations $\widehat{\varphi * T} = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\widehat{\varphi}\widehat{T}$ et $\partial^\alpha(\varphi * T) = \partial^\alpha\varphi * T = \varphi * \partial^\alpha T$ sont bien sûr vraies si $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Lorsque $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $(T_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ lorsque $j \to \infty$.

Les relations $\widehat{\varphi * T} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{\varphi} \widehat{T}$ et $\partial^\alpha(\varphi * T) = \partial^\alpha \varphi * T = \varphi * \partial^\alpha T$ sont bien sûr vraies si $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Lorsque $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $(T_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $T_j \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ lorsque $j \to \infty$. Comme on a $\widehat{\varphi * T_j} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{\varphi} \widehat{T}_j$ et $\partial^\alpha(\varphi * T_j) = \partial^\alpha \varphi * T_j = \varphi * \partial^\alpha T_j$ pour tout j, on passe alors à la limite lorsque $j \to \infty$ en utilisant le fait que toutes les opérations en jeu sont séquentiellement continues sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. ■

L'exemple fondamental

Soit δ la masse de Dirac à l'origine. Alors

$$\delta * \varphi = \varphi \, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

L'exemple fondamental

Soit δ la masse de Dirac à l'origine. Alors

$$\delta * \varphi = \varphi \; \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

En effet

$$\langle \delta * \varphi, \psi \rangle = \langle \delta, \widetilde{\varphi} * \psi \rangle.$$

L'exemple fondamental

Soit δ la masse de Dirac à l'origine. Alors

$$\delta * \varphi = \varphi \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

En effet

$$\langle \delta * \varphi, \psi \rangle = \langle \delta, \widetilde{\varphi} * \psi \rangle.$$

Or

$$\widetilde{\varphi} * \psi(x) = \int \widetilde{\varphi}(x-y)\psi(y)dy = \int \varphi(y-x)\psi(y)dy$$

et $\langle \delta, \widetilde{\varphi} * \psi \rangle = \int \varphi(y)\psi(y)dy$ d'où $\langle \delta * \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle$, i.e. $\delta * \varphi = \varphi$.

Exercice

Montrer que

$$D^{\alpha}\delta * \varphi = D^{\alpha}\varphi \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Un espace de Sobolev

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq j \leq N$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

Un espace de Sobolev

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq j \leq N$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) La dérivée distributionnelle $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^N)$

Un espace de Sobolev

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq j \leq N$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La dérivée distributionnelle $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^N)$

(ii) $\zeta_j \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$

Un espace de Sobolev

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq j \leq N$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) La dérivée distributionnelle $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^N)$
(ii) $\zeta_j \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$
(iii) Le quotient differentiel

$$\frac{[f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, ..., x_N) - f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, ..., x_N)]}{h}$$

a une limite dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ lorsque (le réel) $h \to 0$.

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq j \leq N$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) La dérivée distributionnelle $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^N)$
(ii) $\zeta_j \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$
(iii) Le quotient differentiel

$$\frac{[f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, ..., x_N) - f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, ..., x_N)]}{h}$$

a une limite dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ lorsque (le réel) $h \longrightarrow 0$.
(iv) Il existe $(f_k) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_k \longrightarrow f$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et la suite $(\frac{\partial f_k}{\partial x_j})$ a une limite dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ quand $k \longrightarrow \infty$.

On définit l'espace de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N);\ \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^N)\ (1 \leq j \leq N) \right\}$$

On définit l'espace de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N);\ \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^N)\ (1 \leq j \leq N) \right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \Big(\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit l'espace de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N);\ \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2(\mathbb{R}^N)\ (1 \leq j \leq N) \right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = (\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})^{\frac{1}{2}}.$$

C'est l'espace des fonctions qui sont dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ et dont les dérivées partielles premières distributionnelles sont aussi dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Plus généralement, pour tout entier positif m, on peut définir l'espace de Sobolev

$$H^m(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N);\ \partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^N)\ \forall\, |\alpha| \leq m \right\}$$

Plus généralement, pour tout entier positif m, on peut définir l'espace de Sobolev

$$H^m(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N);\ \partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^N)\ \forall\, |\alpha| \leq m \right\}$$

que l'on peut munir de la norme

$$\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N)} = \left(\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \sum_{|\alpha| \leq m} \|\, \partial^\alpha f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Plus généralement, pour tout entier positif m, on peut définir l'espace de Sobolev

$$H^m(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N);\ \partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^N)\ \forall\, |\alpha| \leq m \right\}$$

que l'on peut munir de la norme

$$\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N)} = (\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \sum_{|\alpha|\leq m} \|\,\partial^\alpha f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})^{\frac{1}{2}}.$$

C'est l'espace des fonctions f qui sont dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles $\partial^\alpha f$ (au sens des distributions) avec $|\alpha| \leq m$.

Plus généralement, pour tout entier positif m, on peut définir l'espace de Sobolev

$$H^m(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N);\ \partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^N)\ \forall\, |\alpha| \leq m \right\}$$

que l'on peut munir de la norme

$$\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N)} = (\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \sum_{|\alpha|\leq m} \|\,\partial^\alpha f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})^{\frac{1}{2}}.$$

C'est l'espace des fonctions f qui sont dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ ainsi que toutes leurs dérivées partielles $\partial^\alpha f$ (au sens des distributions) avec $|\alpha| \leq m$. L'espace $H^m(\mathbb{R}^N)$ est un espace de Hilbert.

Notons que par Parseval, $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ est équivalent à $\zeta^\alpha \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Notons que par Parseval, $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ est équivalent à $\zeta^\alpha \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$.
On peut donc tout aussi bien définir $H^m(\mathbb{R}^N)$ par

$$H^m(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) ; \zeta^\alpha \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N) \ \forall \, |\alpha| \leq m \right\}$$

Notons que par Parseval, $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ est équivalent à $\zeta^\alpha \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. On peut donc tout aussi bien définir $H^m(\mathbb{R}^N)$ par

$$H^m(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N); \zeta^\alpha \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)\ \forall\, |\alpha| \le m \right\}$$

que l'on peut munir de la norme

$$\Big(\sum_{|\alpha| \le m} \int |\zeta^\alpha|^2 \left| \widehat{f}(\zeta) \right|^2 d\zeta \Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int \Big(\sum_{|\alpha| \le m} |\zeta^\alpha|^2 \Big) \left| \widehat{f}(\zeta) \right|^2 d\zeta \Big)^{\frac{1}{2}}$$

qui n'est rien d'autre que la norme initiale en raison du théorème de Parseval.

Comme il existe une constante $c > 0$ telle que

$$c(1+|\zeta|^2)^m \leq \sum_{|\alpha|\leq m} |\zeta^\alpha|^2 \leq c^{-1}(1+|\zeta|^2)^m$$

Comme il existe une constante $c > 0$ telle que

$$c(1+|\zeta|^2)^m \leq \sum_{|\alpha|\leq m} |\zeta^\alpha|^2 \leq c^{-1}(1+|\zeta|^2)^m$$

alors

$$f \in H^m(\mathbb{R}^N) \to \left(\int (1+|\zeta|^2)^m \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta\right)^{\frac{1}{2}}$$

est *une norme équivalente* à la norme initiale.

On écrira cette nouvelle norme sous la forme

$$f \in H^m(\mathbb{R}^N) \to \left(\int \langle \zeta \rangle^{2m} \left| \widehat{f}(\zeta) \right|^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\langle \zeta \rangle = (1 + |\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On écrira cette nouvelle norme sous la forme

$$f \in H^m(\mathbb{R}^N) \to \left(\int \langle \zeta \rangle^{2m} \left| \widehat{f}(\zeta) \right|^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\langle \zeta \rangle = (1 + |\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

L'avantage de cette écriture est qu'**elle a un sens même si** m **n'est pas un entier !**

Definition

Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit l'espace

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N);\ \langle \zeta \rangle^s \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \left(\int \langle \zeta \rangle^{2s} \left| \widehat{f}(\zeta) \right|^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definition

Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit l'espace

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N);\ \langle \zeta \rangle^s \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \left(\int \langle \zeta \rangle^{2s} \left| \widehat{f}(\zeta) \right|^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est un espace de Hilbert.

Definition

Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit l'espace

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N);\ \langle \zeta \rangle^s \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \left(\int \langle \zeta \rangle^{2s} \left| \widehat{f}(\zeta) \right|^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est un espace de Hilbert. On voit que pour *s entier positif*, on retrouve la définition (équivalente) de l'espace de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^N)$.

Exercices

1) *Montrer que* $\delta \in H^s(\mathbb{R}^N)$ *pour tout* $s < -\frac{N}{2}$.
2) *Soit* $s \in \mathbb{R}$. *Montrer que l'opérateur de Laplace*

$$\triangle : f \to \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

est continu de $H^s(\mathbb{R}^N)$ *dans* $H^{s-2}(\mathbb{R}^N)$.

Theorem

Soit $s \in \mathbb{R}$. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^N)$.

L'injection de Sobolev

Theorem

Soit k un entier et $s > \frac{N}{2} + k$. Alors pour tout $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$, $D^\alpha f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ pour $|\alpha| \leq k$ et

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty} \leq c(s, N, \alpha) \|f\|_{H^s}$$

où la constante $c(s, N, \alpha)$ ne depend pas de $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$.

Preuve

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. On sait que

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int e^{ix.\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta$$

d'où

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int \zeta^\alpha e^{ix.\zeta} \widehat{\varphi}(\zeta) d\zeta$$

Or

$$\int |\zeta|^{|\alpha|} |\widehat{\varphi}(\zeta)| \, d\zeta = \int \frac{|\zeta|^{|\alpha|}}{\langle \zeta \rangle^s} \left[\langle \zeta \rangle^s |\widehat{\varphi}(\zeta)| \right] d\zeta$$

où

$$\frac{|\zeta|^{|\alpha|}}{\langle \zeta \rangle^s} = \frac{|\zeta|^{|\alpha|}}{(1 + |\zeta|^2)^{\frac{s}{2}}}$$

Or

$$\int |\zeta|^{|\alpha|} |\widehat{\varphi}(\zeta)| \, d\zeta = \int \frac{|\zeta|^{|\alpha|}}{\langle \zeta \rangle^s} \left[\langle \zeta \rangle^s |\widehat{\varphi}(\zeta)| \right] d\zeta$$

où

$$\frac{|\zeta|^{|\alpha|}}{\langle \zeta \rangle^s} = \frac{|\zeta|^{|\alpha|}}{(1+|\zeta|^2)^{\frac{s}{2}}}$$

qui se comporte à l'infini (i.e. lorsque $|\zeta| \to \infty$) comme $\frac{1}{|\zeta|^{s-|\alpha|}}$ et donc appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$ si $2(s-|\alpha|) > N$, i.e. $s > |\alpha| + \frac{N}{2}$.

Or

$$\int |\zeta|^{|\alpha|} |\widehat{\varphi}(\zeta)| \, d\zeta = \int \frac{|\zeta|^{|\alpha|}}{\langle\zeta\rangle^s} \left[\langle\zeta\rangle^s |\widehat{\varphi}(\zeta)|\right] d\zeta$$

où

$$\frac{|\zeta|^{|\alpha|}}{\langle\zeta\rangle^s} = \frac{|\zeta|^{|\alpha|}}{(1+|\zeta|^2)^{\frac{s}{2}}}$$

qui se comporte à l'infini (i.e. lorsque $|\zeta| \to \infty$) comme $\frac{1}{|\zeta|^{s-|\alpha|}}$ et donc appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$ si $2(s-|\alpha|) > N$, i.e. $s > |\alpha| + \frac{N}{2}$. Cela n'est bien sûr possible que si $|\alpha| \leq k$.

Dans ce cas, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}
|D^{\alpha}\varphi(x)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left\| \frac{|\zeta|^{|\alpha|}}{\langle\zeta\rangle^{s}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left(\int \langle\zeta\rangle^{2s} \left|\widehat{\varphi}(\zeta)\right|^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left\| \frac{|\zeta|^{|\alpha|}}{\langle\zeta\rangle^{s}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité annoncée pour *toute fonction* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Dans ce cas, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} |D^\alpha \varphi(x)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left\| \frac{|\zeta|^{|\alpha|}}{\langle \zeta \rangle^s} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \Big(\int \langle \zeta \rangle^{2s} \, |\widehat{\varphi}(\zeta)|^2 \, d\zeta \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left\| \frac{|\zeta|^{|\alpha|}}{\langle \zeta \rangle^s} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

d'où l'inégalité annoncée pour *toute fonction* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Prenons maintenant $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Il existe $(f_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_j \longrightarrow f$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. En particulier (f_j) est une suite de Cauchy dans $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Alors l'inégalité

$$\left\| D^\alpha (f_j - f_k) \right\|_{L^\infty} \leq c(s, N, \alpha) \left\| f_j - f_k \right\|_{H^s}$$

montre que la suite $(D^\alpha f_j)$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$.

Alors l'inégalité

$$\|D^\alpha(f_j - f_k)\|_{L^\infty} \leq c(s, N, \alpha)\,\|f_j - f_k\|_{H^s}$$

montre que la suite $(D^\alpha f_j)$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$. Elle a donc une limite dans cet espace. Or $D^\alpha f_j \longrightarrow D^\alpha f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et donc, par unicité, $D^\alpha f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ et $\|D^\alpha f_j - D^\alpha f)\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$. Donc l'inégalité
$\|D^\alpha f_j\|_{L^\infty} \leq c(s, N, \alpha)\,\|f_j\|_{H^s}$ donne à la limite
$\|D^\alpha f\|_{L^\infty} \leq c(s, N, \alpha)\,\|f\|_{H^s}$. ■

Alors l'inégalité

$$\|D^\alpha(f_j - f_k)\|_{L^\infty} \leq c(s, N, \alpha) \|f_j - f_k\|_{H^s}$$

montre que la suite $(D^\alpha f_j)$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$. Elle a donc une limite dans cet espace. Or $D^\alpha f_j \longrightarrow D^\alpha f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et donc, par unicité, $D^\alpha f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ et $\|D^\alpha f_j - D^\alpha f)\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$. Donc l'inégalité
$\|D^\alpha f_j\|_{L^\infty} \leq c(s, N, \alpha) \|f_j\|_{H^s}$ donne à la limite
$\|D^\alpha f\|_{L^\infty} \leq c(s, N, \alpha) \|f\|_{H^s}$. ■

Remarque: Si $s > \frac{N}{2}$ (on est simplement dans le cas où $k = 0$) on a alors $H^s(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$.

Alors l'inégalité

$$\left\|D^{\alpha}(f_j - f_k)\right\|_{L^{\infty}} \leq c(s, N, \alpha) \left\|f_j - f_k\right\|_{H^s}$$

montre que la suite $(D^{\alpha} f_j)$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$. Elle a donc une limite dans cet espace. Or $D^{\alpha} f_j \longrightarrow D^{\alpha} f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et donc, par unicité, $D^{\alpha} f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$ et $\left\|D^{\alpha} f_j - D^{\alpha} f)\right\|_{L^{\infty}} \longrightarrow 0$. Donc l'inégalité
$\left\|D^{\alpha} f_j\right\|_{L^{\infty}} \leq c(s, N, \alpha) \left\|f_j\right\|_{H^s}$ donne à la limite
$\left\|D^{\alpha} f\right\|_{L^{\infty}} \leq c(s, N, \alpha) \left\|f\right\|_{H^s}$. ■

Remarque: Si $s > \frac{N}{2}$ (on est simplement dans le cas où $k = 0$) on a alors $H^s(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^N)$.En particulier, $H^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $H^2(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)$.

Notons que $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^N)$ signifie que $\langle\zeta\rangle^s\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

La dualité de Lax

Notons que $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^N)$ signifie que $\langle\zeta\rangle^s\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Si $\psi \in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ alors $\langle\zeta\rangle^{-s}\widehat{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et donc $\widehat{\varphi}\widehat{\psi} \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

La dualité de Lax

Notons que $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^N)$ signifie que $\langle\zeta\rangle^s\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Si $\psi \in H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ alors $\langle\zeta\rangle^{-s}\widehat{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et donc $\widehat{\varphi}\widehat{\psi} \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Theorem

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, le dual de $H^s(\mathbb{R}^N)$ s'identifie isométriquement à $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$ via le crochet de dualité

$$\langle\varphi, \psi\rangle_{H^s,H^{-s}} = \int \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi)d\zeta.$$

Le support d'une distribution

On montre que pour toute distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ *maximal* (pour l'inclusion) tel que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dont le support est dans Ω.

Le support d'une distribution

On montre que pour toute distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ *maximal* (pour l'inclusion) tel que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dont le support est dans Ω. On définit le **support** de T comme le complémentaire de Ω.

Le support d'une distribution

On montre que pour toute distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ *maximal* (pour l'inclusion) tel que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dont le support est dans Ω. On définit le **support** de T comme le complémentaire de Ω. (Si T est une fonction *continue* alors son support usuel coincide avec support distributionnel.)

Le support d'une distribution

On montre que pour toute distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ *maximal* (pour l'inclusion) tel que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dont le support est dans Ω. On définit le **support** de T comme le complémentaire de Ω. (Si T est une fonction *continue* alors son support usuel coincide avec support distributionnel.) Par exemple toute combinaison linéaire de la masse de Dirac à l'origine et de ses dérivées dérivées a comme support $\{0\}$.

Le support d'une distribution

On montre que pour toute distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ *maximal* (pour l'inclusion) tel que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ dont le support est dans Ω. On définit le **support** de T comme le complémentaire de Ω. (Si T est une fonction *continue* alors son support usuel coincide avec support distributionnel.) Par exemple toute combinaison linéaire de la masse de Dirac à l'origine et de ses dérivées dérivées a comme support $\{0\}$. Inversement, on peut montrer que toute distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dont le support est $\{0\}$ est une combinaison linéaire de la masse de Dirac à l'origine et de ses dérivées partielles.

On sait que dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\widehat{(-x)^\alpha \varphi} = D^\alpha \widehat{\varphi}.$$

On sait que dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\widehat{(-x)^\alpha \varphi} = D^\alpha \widehat{\varphi}.$$

Donc pour une somme finie

$$\sum c_\alpha \widehat{(-x)^\alpha \varphi} = \sum c_\alpha D^\alpha \widehat{\varphi}.$$

Comme

$$\widehat{1} = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\delta$$

alors

$$\sum \widehat{c_\alpha(-x)^\alpha} = \sum (2\pi)^{\frac{N}{2}} c_\alpha D^\alpha \delta.$$

Comme

$$\widehat{1} = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\delta$$

alors

$$\sum \widehat{c_\alpha(-x)^\alpha} = \sum (2\pi)^{\frac{N}{2}} c_\alpha D^\alpha \delta.$$

Comme la transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est une *bijection* (bicontinue) on voit que *la transformée de Fourier d'une distribution tempérée T a son support inclus dans $\{0\}$ si et seulement si T est un polynôme.*

Corollary

Toute distribution tempérée harmonique est un polynôme (harmonique).

Corollary

Toute distribution tempérée harmonique est un polynôme (harmonique).

Preuve:

On a

$$0 = \widehat{\triangle\ T} = \sum_{k=1}^{N} \widehat{\frac{\partial^2 T}{\partial x_k}} = -\left|\zeta\right|^2 \widehat{T}.$$

Corollary

Toute distribution tempérée harmonique est un polynôme (harmonique).

Preuve:

On a

$$0 = \widehat{\triangle\, T} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\widehat{\partial^2 T}}{\partial x_k} = -\left|\zeta\right|^2 \widehat{T}.$$

Alors $\left|\zeta\right|^2 \widehat{T} = 0$ implique que le support de $\widehat{T}$ est inclus dans $\{0\}$ et donc T est forcément un polynôme.

Theorem

(i) Dans $\mathbb{R}^3$

$$\triangle \left(\frac{1}{|x|}\right) = -4\pi\delta.$$

Theorem

(i) Dans $\mathbb{R}^3$

$$\triangle\left(\frac{1}{|x|}\right) = -4\pi\delta.$$

On dit que $E(x) := -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}$ *est une solution élémentaire du Laplacien dans* $\mathbb{R}^3$ *(ou le potentiel newtonien dans* $\mathbb{R}^3$*).*
(ii) Dans $\mathbb{R}^2$

$$\triangle\left(\ln(|x|)\right) = 2\pi\delta.$$

Theorem

(i) Dans $\mathbb{R}^3$

$$\triangle \left(\frac{1}{|x|}\right) = -4\pi\delta.$$

On dit que $E(x) := -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}$ *est une solution élémentaire du Laplacien dans* $\mathbb{R}^3$ *(ou le potentiel newtonien dans* $\mathbb{R}^3$*).*
(ii) Dans $\mathbb{R}^2$

$$\triangle \left(\ln(|x|)\right) = 2\pi\delta.$$

On dit que $E(x) := \frac{1}{2\pi}\ln(|x|$ *est une solution élémentaire du Laplacien dans* $\mathbb{R}^2$*.*

Theorem

Soit $N = 2$ ou 3 et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Alors $u = E * f$ est solution l'équation

$$\triangle\, u = f.$$

Theorem

Soit $N = 2$ ou 3 et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Alors $u = E * f$ est solution l'équation

$$\triangle u = f.$$

Preuve:

On a

$$\triangle u = (\triangle E) * f = \delta * f = f.$$

L'intégrale de Poisson

On rappelle d'abord que

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\zeta|}) = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\pi^{-(\frac{n+1}{2})}\Gamma(\frac{N+1}{2})\frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{N+1}{2}}} \ (t>0)$$

où Γ est la fonction Gamma

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}dt \ \ (s>0).$$

On se propose de chercher des fonctions u *harmoniques* dans un demi-espace de $\mathbb{R}^{N+1}$, i.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \triangle_x u = 0, \ (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$$

avec *une valeur prescrite sur le bord*, i.e.

$$u(0, x) = f(x)$$

où, par exemple, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

On considère u comme une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

$$\mathbb{R}_+ \ni t \to u(t,.) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

On considère u comme une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

$$\mathbb{R}_+ \ni t \to u(t,.) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

La transformation de Fourier *partielle* (en x) donne alors

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2} - |\zeta|^2 \, \widehat{u}(t,\zeta) = 0$$

On considère u comme une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

$$\mathbb{R}_+ \ni t \to u(t,.) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

La transformation de Fourier *partielle* (en x) donne alors

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2} - |\zeta|^2 \, \widehat{u}(t,\zeta) = 0$$

qui est une équation différentielle ordinaire du second ordre en t dont la solution explicite est

$$\widehat{u}(t,\zeta) = c_1(\zeta) e^{t|\zeta|} + c_2(\zeta) e^{-t|\zeta|}.$$

On considère u comme une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$

$$\mathbb{R}_+ \ni t \to u(t,.) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

La transformation de Fourier *partielle* (en x) donne alors

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2} - |\zeta|^2 \, \widehat{u}(t,\zeta) = 0$$

qui est une équation différentielle ordinaire du second ordre en t dont la solution explicite est

$$\widehat{u}(t,\zeta) = c_1(\zeta) e^{t|\zeta|} + c_2(\zeta) e^{-t|\zeta|}.$$

Si l'on veut que $\widehat{u}(t,\zeta)$ reste *bornée* quand $t \to +\infty$, on prend $c_1(\zeta) = 0$.

Ainsi

$$\widehat{u}(t,\zeta) = c_2(\zeta)e^{-t|\zeta|}$$

d'où

$$\widehat{u}(0,\zeta) = c_2(\zeta) = \widehat{f}(\zeta)$$

Ainsi

$$\widehat{u}(t,\zeta) = c_2(\zeta)e^{-t|\zeta|}$$

d'où

$$\widehat{u}(0,\zeta) = c_2(\zeta) = \widehat{f}(\zeta)$$

et donc

$$\widehat{u}(t,\zeta) = \widehat{f}(\zeta)e^{-t|\zeta|} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}(2\pi)^{\frac{N}{2}}\widehat{f}(\zeta)e^{-t|\zeta|}$$

Finalement $u(t,x)$ est donnée par

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} f * \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\zeta|}) = \pi^{-(\frac{N+1}{2})}\Gamma(\frac{N+1}{2}) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{N+1}{2}}} f(y)dy.$$

Finalement $u(t,x)$ est donnée par

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} f * \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\zeta|}) = \pi^{-(\frac{N+1}{2})}\Gamma(\frac{N+1}{2}) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{N+1}{2}}} f(y)dy.$$

C'est *la formule de Poisson* qui donne un prolongement (on dit relevement) harmonique de f.

Finalement $u(t,x)$ est donnée par

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} f * \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\zeta|}) = \pi^{-(\frac{N+1}{2})}\Gamma(\frac{N+1}{2}) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{N+1}{2}}} f(y)dy.$$

C'est *la formule de Poisson* qui donne un prolongement (on dit relevement) harmonique de f. Cette formule est valable pour des données f plus générales.

Finalement $u(t,x)$ est donnée par

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} f * \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\zeta|}) = \pi^{-(\frac{N+1}{2})}\Gamma(\frac{N+1}{2}) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{N+1}{2}}} f(y)dy.$$

C'est *la formule de Poisson* qui donne un prolongement (on dit relevement) harmonique de f. Cette formule est valable pour des données f plus générales. Pour $N=1$ elle devient

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{t}{t^2+(x-y)^2} f(y)dy.$$

L'équation de la chaleur

Il s'agit de l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \triangle_x u, \; (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

où $u(t,x)$ dépend de t, le temps, et de $x \in \mathbb{R}^N$, la position spatiale et

$$\triangle_x u = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

désigne le Laplacien (en espace).

L'équation de la chaleur

Il s'agit de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = \triangle_x u, \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = f(x) \end{array} \right.$$

où $u(t,x)$ dépend de t, le temps, et de $x \in \mathbb{R}^N$, la position spatiale et

$$\triangle_x u = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

désigne le Laplacien (en espace). Cette équation intervient dans une foule de situations mettant en jeu des phénomènes de *diffusion* (phénomènes thermiques, probabilités etc.).

On cherchera d'abord des solutions

$$u : t \to u(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

lorsque que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

On cherchera d'abord des solutions

$$u : t \to u(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

lorsque que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Sachant que la transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sur lui-même, l'équation de la chaleur est équivalente (en prenant la transformation de Fourier en x) à

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\widehat{u}(t,\zeta) = -\left|\zeta\right|^2 \widehat{u}(t,\zeta), \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \\ \widehat{u}(0,\zeta) = \widehat{f}(\zeta), \ \ x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

car $\widehat{\triangle_x u} = -\left|\zeta\right|^2 \widehat{u}(t,\zeta)$.

Or cette dernière équation, à ζ fixé, est une simple équation linéaire de première ordre en t qui se résoud *explicitement* par

$$\widehat{u}(t,\zeta) = ce^{-|\zeta|^2 t}$$

où c est une constante en temps (mais dépendant de ζ).

Or cette dernière équation, à ζ fixé, est une simple équation linéaire de première ordre en t qui se résoud *explicitement* par

$$\widehat{u}(t,\zeta) = ce^{-|\zeta|^2 t}$$

où c est une constante en temps (mais dépendant de ζ). En faisant $t = 0$ on tire que $\widehat{u}(0,\zeta) = c$ et donc

$$\widehat{u}(t,\zeta) = \widehat{f}(\zeta)e^{-|\zeta|^2 t}.$$

Le terme $e^{-|\zeta|^2 t}$ **n'est à croissance lente que pour** $t \geq 0$. On a alors le:

Theorem

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Il existe une unique solution* $u \in C^\infty([0,\infty[\,;\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ *du problème de Cauchy. Elle est donnée par*

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\zeta) e^{-|\zeta|^2 t} e^{ix.\zeta} d\zeta, \ (t \geq 0).$$

Le terme $e^{-|\zeta|^2 t}$ **n'est à croissance lente que pour** $t \geq 0$. On a alors le:

Theorem

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Il existe une unique solution* $u \in C^\infty([0,\infty[\,;\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ *du problème de Cauchy. Elle est donnée par*

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\zeta) e^{-|\zeta|^2 t} e^{ix.\zeta} d\zeta, \ (t \geq 0).$$

Le fait que l'on ne sache résoudre l'équation de la chaleur que pour les $t \geq 0$ exprime **un phénomène d'irréversibilité.**

Les solutions généralisées

Pour tout $t \geq 0$ on définit le *propagateur*

$$S(t) : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) :\longrightarrow u(t,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

qui à tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ associe la solution du problème de Cauchy à *l'instant* t.

Les solutions généralisées

Pour tout $t \geq 0$ on définit le *propagateur*

$$S(t) : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) :\longrightarrow u(t,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

qui à tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ associe la solution du problème de Cauchy à *l'instant* t. Notons que $S(0)$ est l'*identité* et

$$\mathcal{F}(S(t)f) = e^{-|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f)$$

où $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier.

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(S(t_1+t_2)f) &= e^{-|\zeta|^2(t_1+t_2)}\mathcal{F}(f) = e^{-|\zeta|^2 t_1} e^{-|\zeta|^2 t_2}\mathcal{F}(f)\\ &= e^{-|\zeta|^2 t_1}\mathcal{F}(S(t_2)f) = \mathcal{F}(S(t_1)S(t_2)f)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(S(t_1+t_2)f) &= e^{-|\zeta|^2(t_1+t_2)}\mathcal{F}(f) = e^{-|\zeta|^2 t_1}e^{-|\zeta|^2 t_2}\mathcal{F}(f) \\ &= e^{-|\zeta|^2 t_1}\mathcal{F}(S(t_2)f) = \mathcal{F}(S(t_1)S(t_2)f)\end{aligned}$$

d'où $S(t_1+t_2)f = S(t_1)S(t_2)f$ et donc $S(t_1+t_2) = S(t_1)S(t_2)$ $\forall\ t_1, t_2 \geq 0$ (une propriété de **semigroupe**).

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(S(t_1+t_2)f) &= e^{-|\zeta|^2(t_1+t_2)}\mathcal{F}(f) = e^{-|\zeta|^2 t_1} e^{-|\zeta|^2 t_2}\mathcal{F}(f) \\ &= e^{-|\zeta|^2 t_1}\mathcal{F}(S(t_2)f) = \mathcal{F}(S(t_1)S(t_2)f)\end{aligned}$$

d'où $S(t_1+t_2)f = S(t_1)S(t_2)f$ et donc $S(t_1+t_2) = S(t_1)S(t_2)$ $\forall\ t_1, t_2 \geq 0$ (une propriété de **semigroupe**). Le propagateur n'est *pas* inversible.

Theorem

Pour tout $s \in \mathbb{R}$ *et* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *on a:*

$$\|S(t)f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}, \ (t \geq 0).$$

On a

$$\|S(t)f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int \langle \zeta \rangle^{2s} \left| \widehat{S(t)f}(\zeta) \right|^2 d\zeta$$

où $\langle \zeta \rangle = (1 + |\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}$.

On a

$$\|S(t)f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int \langle\zeta\rangle^{2s} \left|\widehat{S(t)f}(\zeta)\right|^2 d\zeta$$

où $\langle\zeta\rangle = (1+|\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}$.Or $\widehat{S(t)f}(\zeta) = e^{-|\zeta|^2 t}\widehat{f}(\zeta)$ d'où

$$\begin{aligned}
\|S(t)f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= \int \langle\zeta\rangle^{2s} \left|e^{-|\zeta|^2 t}\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta \\
&\leq \int \langle\zeta\rangle^{2s} \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta = \|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Theorem

Soit $s \in \mathbb{R}$ *et* $t \geq 0$. *Alors la transformation*

$$S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

s'étend de manière unique en une contraction linéaire de $H^s(\mathbb{R}^N)$ *dans lui même (que l'on notera encore* $S(t)$*). De plus*

$$\mathcal{F}(S(t)f) = e^{-|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f), \; f \in H^s(\mathbb{R}^N).$$

Preuve

$$S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N) \to H^s(\mathbb{R}^N)$$

est continue (en norme $H^s(\mathbb{R}^N)$) puisque $\|S(t)f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve

$$S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N) \to H^s(\mathbb{R}^N)$$

est continue (en norme $H^s(\mathbb{R}^N)$) puisque $\|S(t)f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Donc $S(t)$ admet une unique extension continue de $H^s(\mathbb{R}^N)$ dans lui même.

Preuve

$$S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^N)$$

est continue (en norme $H^s(\mathbb{R}^N)$) puisque $\|S(t)f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Donc $S(t)$ admet une unique extension continue de $H^s(\mathbb{R}^N)$ dans lui même. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et soit $(f_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_j \longrightarrow f$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Preuve

$$S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N) \to H^s(\mathbb{R}^N)$$

est continue (en norme $H^s(\mathbb{R}^N)$) puisque $\|S(t)f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Donc $S(t)$ admet une unique extension continue de $H^s(\mathbb{R}^N)$ dans lui même. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et soit $(f_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_j \to f$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. On sait que

$$\mathcal{F}(S(t)f_j) = e^{-|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f_j)$$

et que $S(t)f_j \to S(t)f$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Preuve

$$S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N) \to H^s(\mathbb{R}^N)$$

est continue (en norme $H^s(\mathbb{R}^N)$) puisque $\|S(t)f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Donc $S(t)$ admet une unique extension continue de $H^s(\mathbb{R}^N)$ dans lui même. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et soit $(f_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_j \to f$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. On sait que

$$\mathcal{F}(S(t)f_j) = e^{-|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f_j)$$

et que $S(t)f_j \to S(t)f$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. Donc les convergences ont aussi lieu au sens des distributions, i.e. dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Donc $\mathcal{F}(S(t)f_j) \to \mathcal{F}(S(t)f)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $e^{-|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f_j) \to e^{-|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ car $e^{-|\zeta|^2 t}$ est *à croissance lente* pour $t \geq 0$.

Preuve

$$S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N) \to H^s(\mathbb{R}^N)$$

est continue (en norme $H^s(\mathbb{R}^N)$) puisque $\|S(t)f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Donc $S(t)$ admet une unique extension continue de $H^s(\mathbb{R}^N)$ dans lui même. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et soit $(f_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_j \to f$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. On sait que

$$\mathcal{F}(S(t)f_j) = e^{-|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f_j)$$

et que $S(t)f_j \to S(t)f$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. Donc les convergences ont aussi lieu au sens des distributions, i.e. dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Donc $\mathcal{F}(S(t)f_j) \to \mathcal{F}(S(t)f)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $e^{-|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f_j) \to e^{-|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ car $e^{-|\zeta|^2 t}$ est *à croissance lente* pour $t \geq 0$. Cela montre alors que $\mathcal{F}(S(t)f) = e^{-|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f)$. $\blacksquare$

Definition

Pour tout $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ on appelle solution généralisée de l'équation de la chaleur la fonction

$$u : t \in \mathbb{R} \to u(t) \in H^s(\mathbb{R}^N)$$

définie par $\mathcal{F}(u(t)) = e^{-|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f)$.

Un exemple de solution généralisée

Prenons comme donnée initiale pour l'équation de la chaleur la masse de Dirac à l'origine δ.

Un exemple de solution généralisée

Prenons comme donnée initiale pour l'équation de la chaleur la masse de Dirac à l'origine δ. Nous savons que $\delta \in H^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s < -\frac{N}{2}$ et que $\widehat{\delta} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}$. Donc

$$\widehat{S(t)\delta} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-|\zeta|^2 t}.$$

Un exemple de solution généralisée

Prenons comme donnée initiale pour l'équation de la chaleur la masse de Dirac à l'origine δ. Nous savons que $\delta \in H^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s < -\frac{N}{2}$ et que $\widehat{\delta} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}$. Donc

$$\widehat{S(t)\delta} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-|\zeta|^2 t}.$$

Or

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{|x|^2}{2}}) = e^{-\frac{|\zeta|^2}{2}}$$

et pour $\lambda > 0$

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{|\lambda x|^2}{2}}) = \lambda^{-N} e^{-\frac{\left|\frac{\zeta}{\lambda}\right|^2}{2}} = \lambda^{-N} e^{-\frac{|\zeta|^2}{2\lambda^2}}.$$

Ainsi, pour $t > 0$, pour avoir

$$e^{-\frac{|\zeta|^2}{2\lambda^2}} = e^{-|\zeta|^2 t}$$

il faut choisir $\lambda = \frac{1}{(2t)^{\frac{1}{2}}}$.

Ainsi, pour $t > 0$, pour avoir

$$e^{-\frac{|\zeta|^2}{2\lambda^2}} = e^{-|\zeta|^2 t}$$

il faut choisir $\lambda = \frac{1}{(2t)^{\frac{1}{2}}}$. On tire alors

$$(2t)^{-\frac{N}{2}} \mathcal{F}(e^{-\frac{|x|^2}{4t}}) = e^{-|\zeta|^2 t}$$

$$\mathcal{F}(\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-|\zeta|^2 t} = \mathcal{F}(S(t)\delta)$$

$$S(t)\delta = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

$$S(t)\delta = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Notons que c'est une *fonction* même si à l'instant $t = 0$ ce n'était pas une fonction; c'est même une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ce qui expliquera les phénomènes de régularité que l'on analysera plus loin.

Explicitation des solutions

On a vu que la solution généralisée de l'équation de la chaleur avec la donnée initiale δ est donnée par

$$\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Explicitation des solutions

On a vu que la solution généralisée de l'équation de la chaleur avec la donnée initiale δ est donnée par

$$\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Cette solution particulière est appelée la *solution fondamentale* de l'équation de la chaleur.

Theorem

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Alors la solution de l'équation de la chaleur avec la donnée initiale f est donnée par:

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy, \ (t > 0).$$

Preuve

On part de

$$S(t)\delta = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = K_t(x)$$

où

$$\widehat{K_t} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-|\zeta|^2 t}.$$

Preuve

On part de

$$S(t)\delta = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = K_t(x)$$

où

$$\widehat{K_t} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-|\zeta|^2 t}.$$

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on peut définir la convolée de f avec la distribution tempérée $K(t)$ (qui est même dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ pour $t > 0$)

$$K_t * f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

Or

$$\widehat{K_t * f} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{K(t)} \widehat{f} = e^{-|\zeta|^2 t} \widehat{f}(\zeta) = \widehat{S(t) f}$$

d'où

$$S(t)f = K_t * f = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy.$$

Les effets régularisants instantanés

Nous allons voir que l'équation de la chaleur *"regularise instantanément" la donnée initiale.* Cela veut dire que quelle que soit la donnée initiale, la solution devient aussi régulière que l'on veut dès que $t > 0$.

Les effets régularisants instantanés

Nous allons voir que l'équation de la chaleur *"regularise instantanément" la donnée initiale.* Cela veut dire que quelle que soit la donnée initiale, la solution devient aussi régulière que l'on veut dès que $t > 0$. On le voit déja à sa solution fondamentale

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \ (t > 0)$$

qui appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ alors que sa donnée initiale δ n'est même pas une fonction!

Theorem

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$ et $f \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)$. Soit u la solution de l'équation de la chaleur avec la donnée initiale f . Alors, pour tout $s \in \mathbb{R}$,
$u \in C^\infty(]0,\infty[\,; H^s(\mathbb{R}^N))$.

Prenons d'abord $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. On a $\widehat{u}(t,\zeta) = e^{-|\zeta|^2 t}\widehat{f}(\zeta)$. D'où

$$\begin{aligned}
\langle\zeta\rangle^s \widehat{u}(t,\zeta) &= \langle\zeta\rangle^s e^{-|\zeta|^2 t}\widehat{f}(\zeta) \\
&= \left[\frac{\langle\zeta\rangle^s}{\langle\zeta\rangle^\sigma} e^{-|\zeta|^2 t}\right] \langle\zeta\rangle^\sigma \widehat{f}(\zeta).
\end{aligned}$$

Prenons d'abord $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. On a $\widehat{u}(t,\zeta) = e^{-|\zeta|^2 t}\widehat{f}(\zeta)$. D'où

$$\begin{aligned}\langle\zeta\rangle^s \widehat{u}(t,\zeta) &= \langle\zeta\rangle^s e^{-|\zeta|^2 t}\widehat{f}(\zeta) \\ &= \left[\frac{\langle\zeta\rangle^s}{\langle\zeta\rangle^\sigma} e^{-|\zeta|^2 t}\right]\langle\zeta\rangle^\sigma \widehat{f}(\zeta).\end{aligned}$$

Or

$$\frac{\langle\zeta\rangle^s}{\langle\zeta\rangle^\sigma} e^{-|\zeta|^2 t} = (1+|\zeta|^2)^{\frac{s-\sigma}{2}} e^{-|\zeta|^2 t}$$

est une fonction *bornée* en ζ si $t > 0$. Donc

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq \left[\sup_{\zeta\in\mathbb{R}^N} (1+|\zeta|^2)^{\frac{s-\sigma}{2}} e^{-|\zeta|^2 t}\right] \|f\|_{H^\sigma}.$$

On peut aussi faire le même raisonnement pour les *derivées en temps*:

$$\frac{d^j}{dt^j}\widehat{u}(t,\zeta) = (-1)^j \left|\zeta\right|^{2j} e^{-|\zeta|^2 t}\widehat{f}(\zeta)$$

$$\begin{aligned}
\langle\zeta\rangle^s \frac{d^j}{dt^j}\widehat{u}(t,\zeta) &= \langle\zeta\rangle^s (-1)^j \left|\zeta\right|^{2j} e^{-|\zeta|^2 t}\widehat{f}(\zeta) \\
&= \left[\frac{\langle\zeta\rangle^s (-1)^j \left|\zeta\right|^{2j}}{\langle\zeta\rangle^\sigma} e^{-|\zeta|^2 t}\right] \langle\zeta\rangle^\sigma \widehat{f}(\zeta)
\end{aligned}$$

et $\frac{\langle\zeta\rangle^s (-1)^j |\zeta|^{2j}}{\langle\zeta\rangle^\sigma} e^{-|\zeta|^2 t}$ est bornée en ζ si $t > 0$.

On peut aussi faire le même raisonnement pour les *derivées en temps*:

$$\frac{d^j}{dt^j}\widehat{u}(t,\zeta) = (-1)^j \left|\zeta\right|^{2j} e^{-\left|\zeta\right|^2 t}\widehat{f}(\zeta)$$

$$\begin{aligned}
\langle\zeta\rangle^s \frac{d^j}{dt^j}\widehat{u}(t,\zeta) &= \langle\zeta\rangle^s (-1)^j \left|\zeta\right|^{2j} e^{-\left|\zeta\right|^2 t}\widehat{f}(\zeta) \\
&= \left[\frac{\langle\zeta\rangle^s (-1)^j \left|\zeta\right|^{2j}}{\langle\zeta\rangle^\sigma} e^{-\left|\zeta\right|^2 t}\right] \langle\zeta\rangle^\sigma \widehat{f}(\zeta)
\end{aligned}$$

et $\frac{\langle\zeta\rangle^s (-1)^j \left|\zeta\right|^{2j}}{\langle\zeta\rangle^\sigma} e^{-\left|\zeta\right|^2 t}$ est bornée en ζ si $t > 0$. D'où

$$\left\|\frac{d^j}{dt^j}u(t)\right\|_{H^s} \leq \left[\sup_{\zeta\in\mathbb{R}^N} \left|\zeta\right|^{2j} \left(1+\left|\zeta\right|^2\right)^{\frac{s-\sigma}{2}} e^{-\left|\zeta\right|^2 t}\right] \left\|f\right\|_{H^\sigma}.$$

Soit maintenant $f \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ et soit $(f_k) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_k \to f$ dans $H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ et soit $u_k(.)$ la solution de l'équation de la chaleur correspondant à la donnée initiale f_k.

Soit maintenant $f \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ et soit $(f_k) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_k \to f$ dans $H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ et soit $u_k(.)$ la solution de l'équation de la chaleur correspondant à la donnée initiale f_k. Alors l'inégalité précédente (qui est vraie pour des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$) donne pour tout $j \geq 0$

$$\left\| \frac{d^j}{dt^j} u_k(t) - \frac{d^j}{dt^j} u_l(t) \right\|_{H^s} \leq \left[\sup_{\zeta \in \mathbb{R}^N} |\zeta|^{2j} \left(1 + |\zeta|^2\right)^{\frac{s-\sigma}{2}} e^{-|\zeta|^2 t} \right] \|f_k - f_l\|_{H^\sigma}.$$

$$\sup_{t \geq a} \left\| \frac{d^j}{dt^j} u_k(t) - \frac{d^j}{dt^j} u_l(t) \right\|_{H^s} \leq c_a \|f_k - f_l\|_{H^\sigma}$$

Soit maintenant $f \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ et soit $(f_k) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_k \to f$ dans $H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ et soit $u_k(.)$ la solution de l'équation de la chaleur correspondant à la donnée initiale f_k. Alors l'inégalité précédente (qui est vraie pour des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$) donne pour tout $j \geq 0$

$$\left\| \frac{d^j}{dt^j} u_k(t) - \frac{d^j}{dt^j} u_l(t) \right\|_{H^s} \leq \left[\sup_{\zeta \in \mathbb{R}^N} |\zeta|^{2j} \left(1 + |\zeta|^2\right)^{\frac{s-\sigma}{2}} e^{-|\zeta|^2 t} \right] \|f_k - f_l\|_{H^\sigma} .$$

$$\sup_{t \geq a} \left\| \frac{d^j}{dt^j} u_k(t) - \frac{d^j}{dt^j} u_l(t) \right\|_{H^s} \leq c_a \|f_k - f_l\|_{H^\sigma}$$

Ainsi les dérivées $\left\{ \frac{d^j}{dt^j} u_k(t) \right\}_k$ convergent dans $H^s(\mathbb{R}^N)$ *uniformément* en $t \in [a, \infty[$.

Soit maintenant $f \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ et soit $(f_k) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_k \to f$ dans $H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ et soit $u_k(.)$ la solution de l'équation de la chaleur correspondant à la donnée initiale f_k. Alors l'inégalité précédente (qui est vraie pour des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$) donne pour tout $j \geq 0$

$$\left\| \frac{d^j}{dt^j} u_k(t) - \frac{d^j}{dt^j} u_l(t) \right\|_{H^s} \leq \left[\sup_{\zeta \in \mathbb{R}^N} |\zeta|^{2j} \left(1 + |\zeta|^2\right)^{\frac{s-\sigma}{2}} e^{-|\zeta|^2 t} \right] \|f_k - f_l\|_{H^\sigma} .$$

$$\sup_{t \geq a} \left\| \frac{d^j}{dt^j} u_k(t) - \frac{d^j}{dt^j} u_l(t) \right\|_{H^s} \leq c_a \|f_k - f_l\|_{H^\sigma}$$

Ainsi les dérivées $\left\{ \frac{d^j}{dt^j} u_k(t) \right\}_k$ convergent dans $H^s(\mathbb{R}^N)$ *uniformément* en $t \in [a, \infty[$. Cela montre que $t > 0 \to u(t) \in H^s(\mathbb{R}^N)$ est de classe C^∞. ■

Exercice: *Dans le cadre du Théorème précédent, montrer (en utilisant l'injection de Sobolev) que pour tout* $t > 0$, $u(t,x)$ *est de classe* C^∞ *en* x *et tend vers zero quand* $|x| \to \infty$ *ainsi que toutes ses dérivées partielles.*

Theorem

Soit $p \in [1, +\infty]$. Le propagateur de l'équation de la chaleur

$$S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \ni f \to K(t) * f = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

s'étend de manière unique en un semigroupe de contractions de $L^p(\mathbb{R}^N)$ dans lui même.

Preuve

$$\|K(t)*f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|K(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

car

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N} \frac{1}{\sqrt{2t}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\left|\frac{z}{\sqrt{2t}}\right|^2}{2}} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz = 1.
\end{aligned}$$

Preuve

$$\|K(t) * f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|K(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

car

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N} \frac{1}{\sqrt{2t}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\left|\frac{z}{\sqrt{2}t}\right|^2}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz = 1. \end{aligned}$$

Remarque: $\|S(t)f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ $\forall f \in L^1_+(\mathbb{R}^N)$.

Preuve

$$\|K(t)*f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|K(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

car

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N} \frac{1}{\sqrt{2t}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\left|\frac{z}{\sqrt{2}t}\right|^2}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|z|^2}{2}} dz = 1. \end{aligned}$$

Remarque: $\|S(t)f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ $\forall f \in L^1_+(\mathbb{R}^N)$. C'est la *conservation de la masse sur le cone positif* $L^1_+(\mathbb{R}^N)$.

L'équation de Schrödinger

Il s'agit de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\triangle_x u, \ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

où $u(t, x)$ dépend de t, le temps, et de $x \in \mathbb{R}^N$ la position spatiale;

$$\triangle_x u = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

désigne le *Laplacien* (en espace).

L'équation de Schrödinger

Il s'agit de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\triangle_x u, \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

où $u(t,x)$ dépend de t, le temps, et de $x \in \mathbb{R}^N$ la position spatiale;

$$\triangle_x u = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

désigne le *Laplacien* (en espace). Cette équation décrit le comportement quantique d'une particule qui se meut en l'absence de force exterieure;

L'équation de Schrödinger

Il s'agit de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\triangle_x u, \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

où $u(t,x)$ dépend de t, le temps, et de $x \in \mathbb{R}^N$ la position spatiale;

$$\triangle_x u = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

désigne le *Laplacien* (en espace). Cette équation décrit le comportement quantique d'une particule qui se meut en l'absence de force exterieure; notons qu'en raison de la présence du nombre imaginaire i, la fonction u est naurellement *complexe*.

L'interprétation physique de cette équation est de fournir une densité de probabilité de présence, i.e.

$$\int_{\Xi} |u(t,x)|^2 \, dx$$

est la probabilité que la particule se trouve à l'instant t dans la région Ξ de l'espace.

L'interprétation physique de cette équation est de fournir une densité de probabilité de présence, i.e.

$$\int_{\Xi} |u(t,x)|^2 \, dx$$

est la probabilité que la particule se trouve à l'instant t dans la région Ξ de l'espace. Cela présuppose donc que $\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)|^2 \, dx = 1$ à tout instant.

L'interprétation physique de cette équation est de fournir une densité de probabilité de présence, i.e.

$$\int_{\Xi} |u(t,x)|^2 \, dx$$

est la probabilité que la particule se trouve à l'instant t dans la région Ξ de l'espace. Cela présuppose donc que $\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)|^2 \, dx = 1$ à tout instant. Notons aussi que la transformée de Fourier (en espace) de u doit aussi fournir une densité de probabilité pour la vitesse (ou plutôt le moment) de la particule, i.e.

$$\int_{\Xi} |\widehat{u}(t,\zeta)|^2 \, d\zeta$$

est la probabilité que le moment de la particule soit dans Ξ à l'instant t.

L'interprétation physique de cette équation est de fournir une densité de probabilité de présence, i.e.

$$\int_{\Xi} |u(t,x)|^2 \, dx$$

est la probabilité que la particule se trouve à l'instant t dans la région Ξ de l'espace. Cela présuppose donc que $\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)|^2 \, dx = 1$ à tout instant. Notons aussi que la transformée de Fourier (en espace) de u doit aussi fournir une densité de probabilité pour la vitesse (ou plutôt le moment) de la particule, i.e.

$$\int_{\Xi} |\widehat{u}(t,\zeta)|^2 \, d\zeta$$

est la probabilité que le moment de la particule soit dans Ξ à l'instant t. Notons que par le théorème de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(t,\zeta)|^2 \, d\zeta = \int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)|^2 \, dx.$$

La résolution de l'équation de Schrödinger nécessite la connaissance de u à l'instant "initial" $t = 0$.

La résolution de l'équation de Schrödinger nécessite la connaissance de u à l'instant "initial" $t = 0$. On devra donc étudier le *problème de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = i\triangle_x u, \ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = f(x), \ \ x \in \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

La résolution de l'équation de Schrödinger nécessite la connaissance de u à l'instant "initial" $t = 0$. On devra donc étudier le *problème de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = i\triangle_x u, \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = f(x), \ \ x \in \mathbb{R}^N. \end{array} \right.$$

Il faudra bien sûr s'assurer que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u(0,x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 \, dx$$

i.e. que la norme L^2 *se conserve au cours du temps.*

Notons qu'en physique quantique la position *probable* (i.e. moyenne) de la particule à l'instant t est donnée par $\overline{x}$ où

$$\overline{x}_k = \int_{\mathbb{R}^N} x_k \left|u(t,x)\right|^2 dx$$

tandis que son moment *probable* est donné par $\overline{\zeta}$ où

$$\overline{\zeta}_k = \int_{\mathbb{R}^N} \zeta_k \left|\widehat{u}(t,\zeta)\right|^2 d\zeta.$$

Comme pour l'équation de la chaleur, on regardera la fonction scalaire de *deux* variables $(t, x) \longrightarrow u(t, x)$ comme une fonction d'*une* variable

$$t \longrightarrow u(t, .)$$

qui a t associe la fonction (de x)

$$u(t, .) : x \longrightarrow u(t, x).$$

Résolution de l'équation de Schrödinger

On suppose que "la donnée initiale" f est très régulière

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

et l'on va résoudre le problème de Cauchy dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Résolution de l'équation de Schrödinger

On suppose que "la donnée initiale" f est très régulière

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

et l'on va résoudre le problème de Cauchy dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Sachant que la transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ sur lui-même, le problème de Cauchy précédent est équivalent (en prenant la transformation de Fourier en x) à

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{d}{dt}\widehat{u}(t,\zeta) = -i\,|\zeta|^2\,\widehat{u}(t,\zeta),\ (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \\ \widehat{u}(0,\zeta) = \widehat{f}(\zeta),\ \ x \in \mathbb{R}^N \end{array} \right.$$

car $\widehat{\triangle_x u} = -\,|\zeta|^2\,\widehat{u}(t,\zeta)$.

Or cette dernière équation, à ζ fixé, est une simple équation linéaire de première ordre en t qui se résoud *explicitement* par

$$\widehat{u}(t,\zeta) = ce^{-i|\zeta|^2 t}$$

où c est une constante en temps (mais dépendant de ζ).

Or cette dernière équation, à ζ fixé, est une simple équation linéaire de première ordre en t qui se résoud *explicitement* par

$$\widehat{u}(t,\zeta) = ce^{-i|\zeta|^2 t}$$

où c est une constante en temps (mais dépendant de ζ). En faisant $t = 0$ on tire que $\widehat{u}(0,\zeta) = c$ et donc

$$\widehat{u}(t,\zeta) = \widehat{f}(\zeta)e^{-i|\zeta|^2 t}.$$

Or cette dernière équation, à ζ fixé, est une simple équation linéaire de première ordre en t qui se résoud *explicitement* par

$$\widehat{u}(t,\zeta) = ce^{-i|\zeta|^2 t}$$

où c est une constante en temps (mais dépendant de ζ). En faisant $t = 0$ on tire que $\widehat{u}(0,\zeta) = c$ et donc

$$\widehat{u}(t,\zeta) = \widehat{f}(\zeta)e^{-i|\zeta|^2 t}.$$

Tout d'abord, $e^{-i|\zeta|^2 t}$ étant $\mathcal{C}^\infty$ à *croissance lente* en ζ et $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ alors (pour **tout** t fixé) $\widehat{f}(\zeta)e^{-i|\zeta|^2 t} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Or cette dernière équation, à ζ fixé, est une simple équation linéaire de première ordre en t qui se résoud *explicitement* par

$$\widehat{u}(t,\zeta) = ce^{-i|\zeta|^2 t}$$

où c est une constante en temps (mais dépendant de ζ). En faisant $t = 0$ on tire que $\widehat{u}(0,\zeta) = c$ et donc

$$\widehat{u}(t,\zeta) = \widehat{f}(\zeta)e^{-i|\zeta|^2 t}.$$

Tout d'abord, $e^{-i|\zeta|^2 t}$ étant $\mathcal{C}^\infty$ à *croissance lente* en ζ et $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ alors (pour **tout** t fixé) $\widehat{f}(\zeta)e^{-i|\zeta|^2 t} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. On peut vérifier que

$$t \in \mathbb{R} \to \widehat{f}(\zeta)e^{-i|\zeta|^2 t} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

est indéfiniment dérivable.

On a donc le:

Theorem

Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ il existe une unique fonction

$$t \in \mathbb{R} \to u(t,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

indéfiniment dérivable, solution du problème de Cauchy. Cette solution est donnée par

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\zeta) e^{-i|\zeta|^2 t} e^{ix.\zeta} d\zeta.$$

Notons que $\widehat{u}(t,\zeta) = \widehat{f}(\zeta)e^{-i|\zeta|^2 t}$ montre que $|\widehat{u}(t,\zeta)| = \left|\widehat{f}(\zeta)\right|$ pour tout t et donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(t,\zeta)|^2 \, d\zeta = \int_{\mathbb{R}^N} \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta, \ \forall t$$

i.e. **la norme L^2 (en espace) de la solution se conserve au cours du temps**.

Notons que $\widehat{u}(t,\zeta) = \widehat{f}(\zeta)e^{-i|\zeta|^2 t}$ montre que $|\widehat{u}(t,\zeta)| = \left|\widehat{f}(\zeta)\right|$ pour tout t et donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(t,\zeta)|^2 \, d\zeta = \int_{\mathbb{R}^N} \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta, \; \forall t$$

i.e. **la norme L^2 (en espace) de la solution se conserve au cours du temps**. On a aussi,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \zeta \, |\widehat{u}(t,\zeta)|^2 \, d\zeta = \int_{\mathbb{R}^N} \zeta \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta, \; \forall t$$

Notons que $\widehat{u}(t,\zeta) = \widehat{f}(\zeta)e^{-i|\zeta|^2 t}$ montre que $|\widehat{u}(t,\zeta)| = \left|\widehat{f}(\zeta)\right|$ pour tout t et donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u}(t,\zeta)|^2 \, d\zeta = \int_{\mathbb{R}^N} \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta, \ \forall t$$

i.e. **la norme L^2 (en espace) de la solution se conserve au cours du temps**. On a aussi,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \zeta \, |\widehat{u}(t,\zeta)|^2 \, d\zeta = \int_{\mathbb{R}^N} \zeta \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta, \ \forall t$$

i.e. le moment probable de la particule se *conserve* au cours du temps, ce qui est l'analogue *quantique* du fait classique qu'une particule qui ne subit pas de force exterieure garde un moment constant.

Les solutions généralisées de l'équation de Schrödinger

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit le *propagateur*

$$S(t) : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) :\longrightarrow u(t,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

qui à tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ associe la solution du problème de Cauchy à *l'instant* t.

Les solutions généralisées de l'équation de Schrödinger

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit le *propagateur*

$$S(t) : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) :\longrightarrow u(t,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

qui à tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ associe la solution du problème de Cauchy à *l'instant* t. Notons que $S(0)$ est l'*identité* et

$$\mathcal{F}(S(t)f) = e^{-i|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f)$$

où $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit le *propagateur*

$$S(t) : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) :\longrightarrow u(t,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

qui à tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ associe la solution du problème de Cauchy à *l'instant* t. Notons que $S(0)$ est l'*identité* et

$$\mathcal{F}(S(t)f) = e^{-i|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f)$$

où $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S(t_1+t_2)f) &= e^{-i|\zeta|^2(t_1+t_2)}\mathcal{F}(f) = e^{-i|\zeta|^2 t_1}e^{-i|\zeta|^2 t_2}\mathcal{F}(f) \\ &= e^{-i|\zeta|^2 t_1}\mathcal{F}(S(t_2)f) = \mathcal{F}(S(t_1)S(t_2)f) \end{aligned}$$

d'où $S(t_1+t_2)f = S(t_1)S(t_2)f$. Donc $S(t_1+t_2) = S(t_1)S(t_2)$ (propriété de **groupe**).

Les solutions généralisées de l'équation de Schrödinger

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on définit le *propagateur*

$$S(t) : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) :\longrightarrow u(t,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

qui à tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ associe la solution du problème de Cauchy à *l'instant* t. Notons que $S(0)$ est l'*identité* et

$$\mathcal{F}(S(t)f) = e^{-i|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f)$$

où $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(S(t_1+t_2)f) &= e^{-i|\zeta|^2(t_1+t_2)}\mathcal{F}(f) = e^{-i|\zeta|^2 t_1} e^{-i|\zeta|^2 t_2}\mathcal{F}(f) \\ &= e^{-i|\zeta|^2 t_1}\mathcal{F}(S(t_2)f) = \mathcal{F}(S(t_1)S(t_2)f) \end{aligned}$$

d'où $S(t_1+t_2)f = S(t_1)S(t_2)f$. Donc $S(t_1+t_2) = S(t_1)S(t_2)$ (propriété de **groupe**). En particulier $I = S(0) = S(t)S(-t)$ montre que $S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) :\longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est **inversible** (contrairement au propagateur de l'équation de la chaleur).

Theorem

Pour tout $s \in \mathbb{R}$ *et* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *on a:*

$$\|S(t)f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Rappelons que

$$\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = (\int \langle\zeta\rangle^{2s} |\widehat{\varphi}(\zeta)|^2 \, d\zeta)^{\frac{1}{2}}, \ \varphi \in H^s(\mathbb{R}^N)$$

où $\langle\zeta\rangle = (1 + |\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Rappelons que

$$\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \Big(\int \langle\zeta\rangle^{2s} \left|\widehat{\varphi}(\zeta)\right|^2 d\zeta\Big)^{\frac{1}{2}},\ \varphi \in H^s(\mathbb{R}^N)$$

où $\langle\zeta\rangle = (1+|\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}$. On a donc

$$\|S(t)f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int \langle\zeta\rangle^{2s} \left|\widehat{S(t)f}(\zeta)\right|^2 d\zeta.$$

Rappelons que

$$\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \left(\int \langle\zeta\rangle^{2s} \left|\widehat{\varphi}(\zeta)\right|^2 d\zeta\right)^{\frac{1}{2}}, \ \varphi \in H^s(\mathbb{R}^N)$$

où $\langle\zeta\rangle = (1+|\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}$. On a donc

$$\|S(t)f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int \langle\zeta\rangle^{2s} \left|\widehat{S(t)f}(\zeta)\right|^2 d\zeta.$$

Or $\widehat{S(t)f}(\zeta) = e^{-i|\zeta|^2 t}\widehat{f}(\zeta)$ d'où

$$\begin{aligned} \|S(t)f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= \int \langle\zeta\rangle^{2s} \left|e^{-i|\zeta|^2 t}\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta \\ &= \int \langle\zeta\rangle^{2s} \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta = \|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} . \end{aligned}$$

Rappelons que

$$\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = (\int \langle\zeta\rangle^{2s} |\widehat{\varphi}(\zeta)|^2 \, d\zeta)^{\frac{1}{2}}, \ \varphi \in H^s(\mathbb{R}^N)$$

où $\langle\zeta\rangle = (1+|\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}$. On a donc

$$\|S(t)f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int \langle\zeta\rangle^{2s} \left|\widehat{S(t)f}(\zeta)\right|^2 d\zeta.$$

Or $\widehat{S(t)f}(\zeta) = e^{-i|\zeta|^2 t}\widehat{f}(\zeta)$ d'où

$$\begin{aligned} \|S(t)f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} &= \int \langle\zeta\rangle^{2s} \left|e^{-i|\zeta|^2 t}\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta \\ &= \int \langle\zeta\rangle^{2s} \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta = \|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} . \end{aligned}$$

On remarquera que pour $s = 0$ on retrouve la *conservation* de la norme L^2.

Theorem

Soit $s \in \mathbb{R}$ *et* $t \in \mathbb{R}$. *Alors la transformation*

$$S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

s'étend de manière unique en une transformation unitaire, i.e. une isométrie surjective, de $H^s(\mathbb{R}^N)$ *dans lui même (que l'on notera encore* $S(t)$*). De plus*

$$\mathcal{F}(S(t)f) = e^{-i|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f), \; f \in H^s(\mathbb{R}^N).$$

Nous savons que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est *dense* dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. Or

$$S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N) \to H^s(\mathbb{R}^N)$$

est continue (en norme $H^s(\mathbb{R}^N)$) puisque $\|S(t)f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Nous savons que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est *dense* dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. Or

$$S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N) \to H^s(\mathbb{R}^N)$$

est continue (en norme $H^s(\mathbb{R}^N)$) puisque $\|S(t)f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Donc $S(t)$ admet une unique extension continue de $H^s(\mathbb{R}^N)$ dans lui même.

Nous savons que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est *dense* dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. Or

$$S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N) \to H^s(\mathbb{R}^N)$$

est continue (en norme $H^s(\mathbb{R}^N)$) puisque $\|S(t)f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Donc $S(t)$ admet une unique extension continue de $H^s(\mathbb{R}^N)$ dans lui même. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et soit $(f_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_j \longrightarrow f$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. On sait que

$$\mathcal{F}(S(t)f_j) = e^{-i|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f_j)$$

et que $S(t)f_j \longrightarrow S(t)f$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Nous savons que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est *dense* dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. Or

$$S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N) \to H^s(\mathbb{R}^N)$$

est continue (en norme $H^s(\mathbb{R}^N)$) puisque $\|S(t)f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Donc $S(t)$ admet une unique extension continue de $H^s(\mathbb{R}^N)$ dans lui même. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et soit $(f_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_j \to f$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. On sait que

$$\mathcal{F}(S(t)f_j) = e^{-i|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f_j)$$

et que $S(t)f_j \to S(t)f$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. Donc les convergences ont aussi lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Donc $\mathcal{F}(S(t)f_j) \to \mathcal{F}(S(t)f)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $e^{-i|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f_j) \to e^{-i|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Nous savons que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est *dense* dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. Or

$$S(t) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N) \to H^s(\mathbb{R}^N)$$

est continue (en norme $H^s(\mathbb{R}^N)$) puisque $\|S(t)f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Donc $S(t)$ admet une unique extension continue de $H^s(\mathbb{R}^N)$ dans lui même. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et soit $(f_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_j \to f$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. On sait que

$$\mathcal{F}(S(t)f_j) = e^{-i|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f_j)$$

et que $S(t)f_j \to S(t)f$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. Donc les convergences ont aussi lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Donc $\mathcal{F}(S(t)f_j) \to \mathcal{F}(S(t)f)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $e^{-i|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f_j) \to e^{-i|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Cela montre que $\mathcal{F}(S(t)f) = e^{-i|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f)$.

Definition

Pour tout $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ on appelle solution généralisée de l'équation de Schrödinger la fonction

$$u : t \in \mathbb{R} \to u(t) \in H^s(\mathbb{R}^N)$$

définie par $\mathcal{F}(u(t)) = e^{-i|\zeta|^2 t}\mathcal{F}(f)$.

Theorem

Soit a un nombre complexe **non nul** *tel que* $\mathrm{Re}\, a \geq 0$*. Alors*

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{a|x|^2}{2}}) = \frac{1}{a^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}}$$

où $a^{\frac{1}{2}}$ *désigne la détermination de* $\sqrt{a}$ *de partie réelle* ≥ 0.

Preuve

Notons que $\left|e^{-\frac{a|x|^2}{2}}\right| = e^{-\frac{\mathrm{Re}\, a|x|^2}{2}} \leq 1$ donc $e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ est bornée et donc appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Preuve

Notons que $\left| e^{-\frac{a|x|^2}{2}} \right| = e^{-\frac{\mathrm{Re}\, a|x|^2}{2}} \leq 1$ donc $e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ est bornée et donc appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. On a

$$\langle \mathcal{F}(e^{-\frac{a|x|^2}{2}}), \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle e^{-\frac{a|x|^2}{2}}, \widehat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{a|x|^2}{2}} \widehat{\varphi}(x) dx.$$

$$a \in \{\lambda ; \mathrm{Re}\, \lambda > 0\} \rightarrow \langle \mathcal{F}(e^{-\frac{a|x|^2}{2}}), \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

est *holomorphe* (intégrale dépendant d'un parametre complexe).

Calculons $\mathcal{F}(e^{-\frac{a|x|^2}{2}})$ lorsque a est *réel*.

Calculons $\mathcal{F}(e^{-\frac{a|x|^2}{2}})$ lorsque a est *réel*. On a pour $a > 0$

$$e^{-\frac{a|x|^2}{2}} = e^{-\frac{|\sqrt{a}x|^2}{2}} = \sigma_{\sqrt{a}} u$$

où $u(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ d'où

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{a|x|^2}{2}}) = a^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{\left|\frac{x}{\sqrt{a}}\right|^2}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}}.$$

$$\langle \mathcal{F}(e^{-\frac{a|x|^2}{2}}), \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \frac{1}{a^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \quad \text{pour tout } a > 0.$$

$$\langle \mathcal{F}(e^{-\frac{a|x|^2}{2}}), \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \frac{1}{a^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}}, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \quad \text{pour tout } a > 0.$$

Or

$$a \in \{\lambda; \mathrm{Re}\,\lambda > 0\} \longrightarrow \langle \frac{1}{a^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}}, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int \frac{1}{a^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}} \varphi(x) dx$$

est aussi holomorphe.

$$\langle \mathcal{F}(e^{-\frac{a|x|^2}{2}}), \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \frac{1}{a^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}}, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \quad \text{pour tout } a > 0.$$

Or

$$a \in \{\lambda; \mathrm{Re}\,\lambda > 0\} \to \langle \frac{1}{a^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}}, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int \frac{1}{a^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}} \varphi(x) dx$$

est aussi holomorphe. Par le principe du prolongement analytique, les deux fonctions holomorphes coincident, i.e.

$$\langle \mathcal{F}(e^{-\frac{a|x|^2}{2}}), \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \frac{1}{a^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}}, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \ \text{ si } \mathrm{Re}\, a > 0.$$

Soit a tel que $\mathrm{Re}\, a = 0$ et soit $a_j \to a$ avec $\mathrm{Re}\, a_j > 0$.

On a donc

$$\langle \mathcal{F}(e^{-\frac{a_j|x|^2}{2}}), \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \frac{1}{a_j^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a_j}}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

et $e^{-\frac{a_j|x|^2}{2}} \longrightarrow e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $\frac{1}{a_j^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a_j}} \longrightarrow \frac{1}{a^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$;

On a donc

$$\langle \mathcal{F}(e^{-\frac{a_j|x|^2}{2}}), \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \frac{1}{a_j^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a_j}}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

et $e^{-\frac{a_j|x|^2}{2}} \longrightarrow e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $\frac{1}{a_j^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a_j}} \longrightarrow \frac{1}{a^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$;
on peut donc passer à la limite et avoir

$$\langle \mathcal{F}(e^{-\frac{a|x|^2}{2}}), \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int \frac{1}{a^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}} \varphi(x) dx.$$

Un exemple de solution généralisée

Prenons comme donnée initiale la masse de Dirac à l'origine δ.

Un exemple de solution généralisée

Prenons comme donnée initiale la masse de Dirac à l'origine δ. Nous savons que $\delta \in H^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s < -\frac{N}{2}$ et que $\widehat{\delta} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}$. Donc

$$\widehat{S(t)\delta} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-i|\zeta|^2 t}.$$

Un exemple de solution généralisée

Prenons comme donnée initiale la masse de Dirac à l'origine δ. Nous savons que $\delta \in H^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout $s < -\frac{N}{2}$ et que $\widehat{\delta} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}}$. Donc

$$\widehat{S(t)\delta} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-i|\zeta|^2 t}.$$

Or

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{a|x|^2}{2}}) = \frac{1}{a^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2a}}.$$

Soit $t > 0$. Si l'on choisit a tel que $\frac{1}{2a} = it$, i.e. $a = \frac{1}{2it}$ alors on voit que

$$e^{-i|\zeta|^2 t} = a^{\frac{N}{2}} \mathcal{F}(e^{-\frac{|x|^2}{4it}}) = \frac{1}{(2it)^{\frac{N}{2}}} \mathcal{F}(e^{-\frac{|x|^2}{4it}}).$$

Donc

$$\widehat{S(t)\delta} = \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{N}{2}}} \mathcal{F}(e^{-\frac{|x|^2}{4it}})$$

d'où l'on tire que

$$S(t)\delta = \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4it}}.$$

Donc

$$\widehat{S(t)\delta} = \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{N}{2}}} \mathcal{F}(e^{-\frac{|x|^2}{4it}})$$

d'où l'on tire que

$$S(t)\delta = \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4it}}.$$

Cette solution particulière est appelée la *solution fondamentale* de l'équation de Schrödinger.

Donc

$$\widehat{S(t)\delta} = \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{N}{2}}} \mathcal{F}(e^{-\frac{|x|^2}{4it}})$$

d'où l'on tire que

$$S(t)\delta = \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4it}}.$$

Cette solution particulière est appelée la *solution fondamentale* de l'équation de Schrödinger. Elle permet de construire les autres solutions.

Explicitation des solutions généralisées

Theorem

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Alors la solution de l'équation de Schrödinger avec la donnée initiale f est donnée par:

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{N}{2}}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4it}} f(y)dy, \ \ (t > 0).$$

On part de

$$S(t)\delta = \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4it}} = K(t)$$

où

$$\widehat{K(t)} = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{-i|\zeta|^2 t}.$$

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on peut définir la convolée de f avec la distribution tempérée $K(t)$

$$K(t) * f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on peut définir la convolée de f avec la distribution tempérée $K(t)$

$$K(t) * f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

Or

$$\widehat{K(t) * f} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \widehat{K(t)} \widehat{f} = e^{-i|\zeta|^2 t} \widehat{f}(\zeta) = \widehat{S(t) f}$$

d'où

$$S(t)f = K(t) * f = \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{N}{2}}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4it}} f(y) dy.$$

Nous avons dit que l'équation de Schrödinger décrit l'état quantique d'une particule qui se meut en l'absence de force exterieure. Le fonction d'onde $\psi(t, x)$ (solution de l'équation de Schrödinger) ou plutôt

$$|\psi(t, .)|^2$$

a la signification d'une densité de probabilité de présence. En nous plaçant en dimension 1 pour simplifier,

$$\overline{x} := \int_{\mathbb{R}} x \, |\psi(t, x)|^2 \, dx$$

est donc la *position moyenne* de la particule (à l'instant t).

En fait, en physique quantique, à toute grandeur A (on dit observable) est attaché un opérateur *auto-adjoint* (dans un espace de Hilbert) que l'on note aussi A. La valeur moyenne de cette grandeur (quand l'état quantique est ψ) est alors

$$\overline{A} := \langle A\psi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} x\,|\psi(x)|^2\,dx.$$

Ainsi dans le cas de la grandeur "position", l'opérateur auto-adjoint en question n'est autre que l'opérateur de multiplication par la fonction x

$$A : \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \to x\varphi.$$

En fait, en physique quantique, à toute grandeur A (on dit observable) est attaché un opérateur *auto-adjoint* (dans un espace de Hilbert) que l'on note aussi A. La valeur moyenne de cette grandeur (quand l'état quantique est ψ) est alors

$$\overline{A} := \langle A\psi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} x \, |\psi(x)|^2 \, dx.$$

Ainsi dans le cas de la grandeur "position", l'opérateur auto-adjoint en question n'est autre que l'opérateur de multiplication par la fonction x

$$A : \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \to x\varphi.$$

Il faut restreindre le domaine de définition de A à

$$D(A) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}). \; x\varphi \in L^2(\mathbb{R}).\}$$

L'opérateur impulsion est

$$B : \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \to i\frac{d\varphi}{dx}$$

de domaine

$$D(B) = H^1(\mathbb{R}).$$

L'opérateur impulsion est

$$B : \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \to i\frac{d\varphi}{dx}$$

de domaine

$$D(B) = H^1(\mathbb{R}).$$

De même *l'impulsion moyenne* (quand l'état quantique est ψ) vaut

$$\overline{B} := \langle B\psi, \psi\rangle = i\langle \frac{d\varphi}{dx}, \psi\rangle.$$

Par l'identité de Parseval

$$i\langle \frac{d\varphi}{dx}, \psi\rangle = i\langle \widehat{\frac{d\varphi}{dx}}, \widehat{\psi}\rangle = \langle \zeta\widehat{\psi}, \widehat{\psi}\rangle.$$

On voit que c'est une "position moyenne" pour la fonction d'onde $\widehat{\psi}$.

L'incertitude sur la grandeur A est définie par sa variance

$$Var(A) := \langle (A - \overline{A})\psi, (A - \overline{A})\psi \rangle.$$

De même, l'incertitude sur la grandeur B est définie par sa variance

$$Var(B) := \langle (B - \overline{B})\psi, (B - \overline{B})\psi \rangle.$$

Theorem

(Le principe d'incertitude)

$$Var(A)Var(B) \geq \frac{1}{4}.$$

Preuve

Si l'on introduit le *commutateur* de A et B

$$[A, B] := AB - BA$$

on vérifie que

$$[A, B]\,\psi = i\frac{d}{dx}(x\psi) - ix\frac{d}{dx}(\psi) = i\psi.$$

D'où en prenant $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec $\|\psi\| = 1$

$$\begin{aligned}
1 &= -i\langle (AB - BA)\psi, \psi\rangle = -i\langle AB\psi, \psi\rangle + i\langle BA\psi, \psi\rangle \\
&= -i\langle B\psi, A\psi\rangle + i\langle A\psi, B\psi\rangle \\
&= 2\,\mathrm{Re}(i\langle A\psi, B\psi\rangle)
\end{aligned}$$

et en utilisant Cauchy Schwarz

$$1 \leq 4 \left| \langle A\psi, B\psi \rangle \right|^2 \leq \left\| A\psi \right\|^2 \left\| B\psi \right\|^2 .$$

Or

$$Var(A) = \langle (A - \overline{A})\psi, (A - \overline{A})\psi \rangle = \left\| A\psi \right\|^2$$

et

$$Var(B) = \langle (B - \overline{B})\psi, (B - \overline{B})\psi \rangle = \left\| B\psi \right\|^2$$

ce qui finit la preuve.

L'équation des ondes

Il s'agit de l'équation (du *second* ordre en temps)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \triangle_x u, \ (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$$

avec les conditions initiales

$$u(0, x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x).$$

Comme pour les autres exemples, on regarde u comme une fonction de t à valeur dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (ou bien dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$) afin de pouvoir prendre la transformée de Fourier en $x \in \mathbb{R}^N$. Cela donne

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2} + |\zeta|^2 \, \widehat{u}(t, \zeta) = 0.$$

Comme pour les autres exemples, on regarde u comme une fonction de t à valeur dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (ou bien dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$) afin de pouvoir prendre la transformée de Fourier en $x \in \mathbb{R}^N$. Cela donne

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2} + |\zeta|^2 \, \widehat{u}(t,\zeta) = 0.$$

On tombe sur une équation différentielle ordinaire (en t) du second ordre qui se résout explicitement

$$\widehat{u}(t,\zeta) = \widehat{f}(\zeta)\cos(|\zeta|\, t) + \widehat{g}(\zeta)\frac{\sin(|\zeta|\, t)}{|\zeta|}.$$

On remarquera que pour $t \neq 0$, $\cos(|\zeta|\, t)$ et $\frac{\sin(|\zeta| t)}{|\zeta|}$ sont C^∞ à croissance lente

On remarquera que pour $t \neq 0$, $\cos(|\zeta|\, t)$ et $\frac{\sin(|\zeta| t)}{|\zeta|}$ sont C^∞ à croissance lentede sorte que $\widehat{f}(\zeta)\cos(|\zeta|\, t)$ et $\widehat{g}(\zeta)\frac{\sin(|\zeta| t)}{|\zeta|}$ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (resp. dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$) si les données initiales sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (resp. dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$).

On remarquera que pour $t \neq 0$, $\cos(|\zeta|\, t)$ et $\frac{\sin(|\zeta| t)}{|\zeta|}$ sont C^∞ à croissance lentede sorte que $\widehat{f}(\zeta)\cos(|\zeta|\, t)$ et $\widehat{g}(\zeta)\frac{\sin(|\zeta| t)}{|\zeta|}$ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (resp. dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$) si les données initiales sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (resp. dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$). Travaillons dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ pour simplifier.

On a

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(t,\zeta) &= \widehat{f}(\zeta)\cos(|\zeta|\, t) + \widehat{g}(\zeta)\frac{\sin(|\zeta|\, t)}{|\zeta|} \\
&= \widehat{f}(\zeta)\cos(\zeta t) + \widehat{g}(\zeta)\frac{\sin(\zeta t)}{\zeta}.
\end{aligned}$$

Explicitation de la solution en dimension 1

On a

$$\begin{aligned}\widehat{u}(t,\zeta) &= \widehat{f}(\zeta)\cos(|\zeta|\,t) + \widehat{g}(\zeta)\frac{\sin(|\zeta|\,t)}{|\zeta|} \\ &= \widehat{f}(\zeta)\cos(\zeta t) + \widehat{g}(\zeta)\frac{\sin(\zeta t)}{\zeta}.\end{aligned}$$

Donc

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\zeta)\cos(\zeta t)) + \mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}(\zeta)\frac{\sin(\zeta t)}{\zeta}).$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\zeta)\cos(\zeta t)) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\zeta)) * \mathcal{F}^{-1}(\cos(\zeta t))) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} f * \mathcal{F}^{-1}(\cos(\zeta t))).
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\zeta)\cos(\zeta t)) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\zeta)) * \mathcal{F}^{-1}(\cos(\zeta t))) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} f * \mathcal{F}^{-1}(\cos(\zeta t))).\end{aligned}$$

On sait que $\widehat{\delta_h} = e^{ih.\zeta}\widehat{\delta} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{ih.\zeta}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\zeta)\cos(\zeta t)) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\zeta)) * \mathcal{F}^{-1}(\cos(\zeta t))) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} f * \mathcal{F}^{-1}(\cos(\zeta t))).\end{aligned}$$

On sait que $\widehat{\delta_h} = e^{ih.\zeta}\widehat{\delta} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{ih.\zeta}$. Comme $\cos(\zeta t) = \frac{1}{2}(e^{i\zeta t} + e^{-i\zeta t})$ alors

$$\cos(\zeta t) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\widehat{\delta_t} + \widehat{\delta_{-t}}}{2}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\widehat{\delta_t + \delta_{-t}}}{2}\right).$$

D'où

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\zeta)\cos(\zeta t)) = \frac{1}{2} f * (\delta_t) + \frac{1}{2} f * (\delta_{-t}) = \frac{1}{2}(f(x-t) + f(x+t)).$$

D'où

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\zeta)\cos(\zeta t)) = \frac{1}{2} f * (\delta_t) + \frac{1}{2} f * (\delta_{-t}) = \frac{1}{2}(f(x-t) + f(x+t)).$$

D'autre part la transformée de Fourier de l'indicatrice (intégrable) $I = 1_{[-t,+t]}$ vaut

$$\widehat{I}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-ix\zeta} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\zeta} \left[e^{it\zeta} - e^{-it\zeta} \right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\zeta t)}{\zeta}.$$

D'où

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\zeta)\cos(\zeta t)) = \frac{1}{2} f * (\delta_t) + \frac{1}{2} f * (\delta_{-t}) = \frac{1}{2}(f(x-t) + f(x+t)).$$

D'autre part la transformée de Fourier de l'indicatrice (intégrable) $I = 1_{[-t,+t]}$ vaut

$$\widehat{I}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-ix\zeta} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\zeta} \left[e^{it\zeta} - e^{-it\zeta} \right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\zeta t)}{\zeta}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}(\zeta)\frac{\sin(\zeta t)}{\zeta}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} g * \mathcal{F}^{-1}(\frac{\sin(\zeta t)}{\zeta}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} g * (\frac{\sqrt{2\pi}}{2} I) = \frac{1}{2} g * I = \frac{1}{2} \int_{-t}^{+t} g(x+y) dy.
\end{aligned}$$

On obtient finalement **la formule de D'Alembert**

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(f(x-t)+f(x+t)) + \frac{1}{2}\int_{-t}^{+t} g(x+y)dy.$$

Explicitation de la solution en dimension 3

Calculons d'abord la transformée de Fourier de la mesure de surface σ_r sur la sphère de rayon r.

Explicitation de la solution en dimension 3

Calculons d'abord la transformée de Fourier de la mesure de surface σ_r sur la sphère de rayon r. Notons que σ_r définit la distribution tempérée (à support compact)

$$\langle \sigma_r, \psi \rangle = \int_{|x|=r} \psi(x) d\sigma_r(x)$$

Calculons d'abord la transformée de Fourier de la mesure de surface σ_r sur la sphère de rayon r. Notons que σ_r définit la distribution tempérée (à support compact)

$$\langle \sigma_r, \psi \rangle = \int_{|x|=r} \psi(x) d\sigma_r(x)$$

et que

$$\widehat{\sigma_r}(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{|x|=r} e^{-i\zeta.x} d\sigma_r(x).$$

Comme la mesure σ_r est *radiale* (i.e. invariante par rotation), il en est de même de $\widehat{\sigma_r}(\zeta)$.

Comme la mesure σ_r est *radiale* (i.e. invariante par rotation), il en est de même de $\widehat{\sigma_r}(\zeta)$. Calculons $\widehat{\sigma_r}(\zeta)$ en $\zeta = (0, 0, \zeta_3)$ en utilisant les coordonnées sphèriques, soit

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{|x|=r} e^{-i\zeta_3 x_3} d\sigma_r(x) \\
= \; & \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} e^{-i\zeta_3 r\cos\theta} r^2 \sin\theta d\theta \\
= \; & \frac{2\pi r^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\pi} e^{-i\zeta_3 r\cos\theta} \sin\theta d\theta = \frac{2\pi r^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-1}^{1} e^{-i\zeta_3 r u} du \\
= \; & \frac{2\pi r^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{i\zeta_3 r} \left[e^{i\zeta_3 r} - e^{-i\zeta_3 r} \right] = \frac{4\pi r}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sin(\zeta_3 r)}{\zeta_3}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\widehat{\sigma}_r(\zeta) = \frac{4\pi r}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sin(|\zeta|\, r)}{|\zeta|}$$

D'où

$$\widehat{\sigma_r}(\zeta) = \frac{4\pi r}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sin(|\zeta|\, r)}{|\zeta|}$$

et donc (si $t > 0$)

$$\widehat{\sigma_t}(\zeta) = \frac{4\pi t}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sin(|\zeta|\, t)}{|\zeta|}$$

D'où

$$\widehat{\sigma_r}(\zeta) = \frac{4\pi r}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sin(|\zeta|\, r)}{|\zeta|}$$

et donc (si $t > 0$)

$$\widehat{\sigma_t}(\zeta) = \frac{4\pi t}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\sin(|\zeta|\, t)}{|\zeta|}$$

On a $\widehat{u}(t, \zeta) = \widehat{f}(\zeta) \cos(|\zeta|\, t) + \widehat{g}(\zeta) \frac{\sin(|\zeta| t)}{|\zeta|}$ et

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}(\zeta) \frac{\sin(|\zeta|\, t)}{|\zeta|}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} g * \mathcal{F}^{-1}(\frac{\sin(|\zeta|\, t)}{|\zeta|}) \\
&= \frac{1}{4\pi t} g * \sigma_t = \frac{1}{4\pi t} \int_{|y|=t} g(x+y) d\sigma_t(x).
\end{aligned}$$

Notons que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\widehat{f}(\zeta)\frac{\sin(|\zeta|\,t)}{|\zeta|}\right)=\widehat{f}(\zeta)\cos(|\zeta|\,t)$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\zeta)\cos(|\zeta|\,t)) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\widehat{f}(\zeta)\frac{\sin(|\zeta|\,t)}{|\zeta|}\right)\right]\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(\zeta)\frac{\sin(|\zeta|\,t)}{|\zeta|})\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi t}\int_{|y|=t} f(x+y)d\sigma_t(x)\right].\end{aligned}$$

Finalement

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{|y|=t} g(x+y)d\sigma_t(y) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi t}\int_{|y|=t} f(x+y)d\sigma_t(y)\right].$$

Finalement

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi t}\int_{|y|=t} g(x+y)d\sigma_t(y) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi t}\int_{|y|=t} f(x+y)d\sigma_t(y)\right].$$

On peut aussi l'écrire comme intégrale sur la sphère *unité*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{t^2}{4\pi t}\int_{|y|=1} g(x+ty)d\sigma_1(y) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t^2}{4\pi t}\int_{|y|=1} f(x+ty)d\sigma_1(y)\right. \\ &= \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} g(x+ty)d\sigma_1(y) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} f(x+ty)d\sigma_1(y)\right] \end{aligned}$$

La methode de descente d'Hadamard

On va expliciter la solution en dimension 2 à partir de celle de la dimension 3

La methode de descente d'Hadamard

On va expliciter la solution en dimension 2 à partir de celle de la dimension 3

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} g(x+ty)d\sigma_1(y) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} f(x+ty)d\sigma_1(y)\right] \\
&= \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} g(x_1+ty_1, x_2+ty_2, x_3+ty_3)d\sigma_1(y) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} f(x_1+ty_1, x_2+ty_2, x_3+ty_3)d\sigma_1(y)\right]
\end{aligned}
$$

par *la methode de descente de Hadamard*.

La methode de descente d'Hadamard

On va expliciter la solution en dimension 2 à partir de celle de la dimension 3

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} g(x+ty)d\sigma_1(y) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} f(x+ty)d\sigma_1(y)\right] \\
&= \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} g(x_1+ty_1, x_2+ty_2, x_3+ty_3)d\sigma_1(y) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} f(x_1+ty_1, x_2+ty_2, x_3+ty_3)d\sigma_1(y)\right]
\end{aligned}
$$

par *la methode de descente de Hadamard*. Si l'on prend des données intiales f et g indépendantes de la troisième variable, on obtient une solution de l'équation des ondes indépendante de la troisième variable et donc une solution de l'équation des ondes en dimension 2 !

Par unicité, la solution de l'équation des ondes en dimension 2 est donc donnée par

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{t}{4\pi}\int_{S^2} g(x_1+ty_1, x_2+ty_2)\,d\sigma_1(y) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_{S^2} f(x_1+ty_1, x_2+ty_2)\,d\sigma_1(y)\right]
\end{aligned}
$$

mais où l'on intégre en y sur la sphère unité S^2 de $\mathbb{R}^3$.

Si l'on utilise les coordonnées sphériques en prenant l'axe des y_1 comme indiquant le pôle nord (on fait jouer à y_1 le rôle joué habituellement par y_3) on a

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta g(x_1 + t\cos\theta, x_2 + t\sin\theta\cos\varphi)\sin\theta \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta f(x_1 + t\cos\theta, x_2 + t\sin\theta\cos\varphi)\sin\theta\right] \end{aligned}$$

On note que l'application

$$(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow (u_1, u_2) = (\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi)$$

est (à des ensembles de mesure nulle près) une *bijection* de $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ sur le disque unité du plan

$$D = \left\{(u_1, u_2); u_1^2 + u_2^2 \leq 1\right\}.$$

On note que l'application

$$(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to (u_1, u_2) = (\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi)$$

est (à des ensembles de mesure nulle près) une *bijection* de $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ sur le disque unité du plan

$$D = \left\{ (u_1, u_2); u_1^2 + u_2^2 \leq 1 \right\}.$$

On a

$$du_1 du_2 = \left| \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\theta, \varphi)} \right| d\theta d\varphi = \sin^2\theta \left|\sin\varphi\right| d\theta d\varphi.$$

Comme

$$\sqrt{1 - |u|^2} = \sin\theta \left|\sin\varphi\right|$$

alors

$$du_1 du_2 = \sqrt{1 - |u|^2} \sin\theta d\theta d\varphi.$$

On tire

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{t}{4\pi}\int_{|u|\leq 1} g(x_1+tu_1, x_2+tu_2)\frac{du_1\,du_2}{\sqrt{1-|u|^2}} \\
&+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_{|u|\leq 1} f(x_1+tu_1, x_2+tu_2)\frac{du_1\,du_2}{\sqrt{1-|u|^2}}\right]
\end{aligned}
$$

et finalement

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{t}{4\pi}\int_D g(x+ty)\frac{dy}{\sqrt{1-|y|^2}} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_D f(x+ty)\frac{dy}{\sqrt{1-|y|^2}}\right].
\end{aligned}
$$

Conservation de l'energie

En notant $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t$ on voit que

$$\widehat{u_t}(t,\zeta) = -\widehat{f}(\zeta)\,|\zeta|\sin(|\zeta|\,t) + \widehat{g}(\zeta)\cos(|\zeta|\,t)$$

et

$$|\zeta|\,\widehat{u}(t,\zeta) = \widehat{f}(\zeta)\,|\zeta|\cos(|\zeta|\,t) + \widehat{g}(\zeta)\sin(|\zeta|\,t).$$

Alors, on prend leurs parties réelles que l'on elève au carré

$$(\mathrm{Re}\,\widehat{u_t}(t,\zeta))^2 = \Big(-(\mathrm{Re}\,\widehat{f}(\zeta))\,|\zeta|\sin(|\zeta|\,t) + (\mathrm{Re}\,\widehat{g}(\zeta))\cos(|\zeta|\,t)\Big)^2$$

$$|\zeta|^2\,(\mathrm{Re}\,\widehat{u}(t,\zeta))^2 = \Big((\mathrm{Re}\,\widehat{f}(\zeta))\,|\zeta|\cos(|\zeta|\,t) + (\mathrm{Re}\,\widehat{g}(\zeta))\sin(|\zeta|\,t)\Big)^2$$

dont la somme donne

$$(\mathrm{Re}\,\widehat{u_t}(t,\zeta))^2 + |\zeta|^2\,(\mathrm{Re}\,\widehat{u}(t,\zeta))^2 = (\mathrm{Re}\,\widehat{g}(\zeta))^2 + (\mathrm{Re}\,\widehat{f}(\zeta))^2\,|\zeta|^2\,.$$

On faisant pareillement avec les parties imaginaires on tire

$$(\mathrm{Im}\,\widehat{u_t}(t,\zeta))^2 + |\zeta|^2\,(\mathrm{Im}\,\widehat{u}(t,\zeta))^2 = (\mathrm{Im}\,\widehat{g}(\zeta))^2 + (\mathrm{Im}\,\widehat{f}(\zeta))^2\,|\zeta|^2\,.$$

On faisant pareillement avec les parties imaginaires on tire

$$(\mathrm{Im}\,\widehat{u_t}(t,\zeta))^2 + |\zeta|^2\,(\mathrm{Im}\,\widehat{u}(t,\zeta))^2 = (\mathrm{Im}\,\widehat{g}(\zeta))^2 + (\mathrm{Im}\,\widehat{f}(\zeta))^2\,|\zeta|^2 .$$

En additionant les deux dernières identités on obtient

$$|\widehat{u_t}(t,\zeta)|^2 + |\zeta|^2\,|\widehat{u}(t,\zeta)|^2 = |\widehat{g}(\zeta)|^2 + \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 |\zeta|^2$$

On faisant pareillement avec les parties imaginaires on tire

$$(\mathrm{Im}\,\widehat{u_t}(t,\zeta))^2 + |\zeta|^2 (\mathrm{Im}\,\widehat{u}(t,\zeta))^2 = (\mathrm{Im}\,\widehat{g}(\zeta))^2 + (\mathrm{Im}\,\widehat{f}(\zeta))^2 |\zeta|^2 .$$

En additionnant les deux dernières identités on obtient

$$|\widehat{u_t}(t,\zeta)|^2 + |\zeta|^2 |\widehat{u}(t,\zeta)|^2 = |\widehat{g}(\zeta)|^2 + \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 |\zeta|^2$$

ou bien

$$|\widehat{u_t}(t,\zeta)|^2 + |\zeta\widehat{u}(t,\zeta)|^2 = |\widehat{g}(\zeta)|^2 + \left|\zeta\widehat{f}(\zeta)\right|^2$$

On faisant pareillement avec les parties imaginaires on tire

$$(\mathrm{Im}\,\widehat{u_t}(t,\zeta))^2+|\zeta|^2\,(\mathrm{Im}\,\widehat{u}(t,\zeta))^2=(\mathrm{Im}\,\widehat{g}(\zeta))^2+(\mathrm{Im}\,\widehat{f}(\zeta))^2\,|\zeta|^2\,.$$

En additionant les deux dernières identités on obtient

$$|\widehat{u_t}(t,\zeta)|^2+|\zeta|^2\,|\widehat{u}(t,\zeta)|^2=|\widehat{g}(\zeta)|^2+\left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2|\zeta|^2$$

ou bien

$$|\widehat{u_t}(t,\zeta)|^2+|\zeta\widehat{u}(t,\zeta)|^2=|\widehat{g}(\zeta)|^2+\left|\zeta\widehat{f}(\zeta)\right|^2$$

(On voit donc que **pour tout $\zeta\in\mathbb{R}^N$, la quantité** $|\widehat{u_t}(t,\zeta)|^2+|\zeta\widehat{u}(t,\zeta)|^2$ **se conserve au cours du temps**.)

Soit

$$\langle\zeta\rangle = (1+|\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit

$$\langle \zeta \rangle = (1 + |\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En multipliant l'identité par $\langle \zeta \rangle^{2(s-1)}$ et en intégrant on voit que

$$\|u_t\|^2_{H^{s-1}} + \|\nabla_x u\|^2_{H^{s-1}} = \|g\|^2_{H^{s-1}} + \|\nabla_x f\|^2_{H^{s-1}}$$

se conserve au cours du temps.

Soit

$$\langle \zeta \rangle = (1 + |\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En multipliant l'identité par $\langle \zeta \rangle^{2(s-1)}$ et en intégrant on voit que

$$\|u_t\|_{H^{s-1}}^2 + \|\nabla_x u\|_{H^{s-1}}^2 = \|g\|_{H^{s-1}}^2 + \|\nabla_x f\|_{H^{s-1}}^2$$

se conserve au cours du temps. Le cas $s = 1$ donne

$$\|u_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla_x u\|_{L^2}^2$$

i.e. **l'energie totale** *(l'energie potentielle plus l'energie cinétique)* **se conserve au cours du temps.**

Equipartition de l'energie

Partons de

$$\widehat{u_t}(t,\zeta) = -\widehat{f}(\zeta)\,|\zeta|\sin(|\zeta|\,t) + \widehat{g}(\zeta)\cos(|\zeta|\,t)$$

Equipartition de l'energie

Partons de

$$\widehat{u_t}(t,\zeta) = -\widehat{f}(\zeta)\,|\zeta|\sin(|\zeta|\,t) + \widehat{g}(\zeta)\cos(|\zeta|\,t)$$

qui montre que $|\widehat{u_t}(t,\zeta)|^2$ est égal à

$$\begin{aligned}
& \left(-\widehat{f}(\zeta)\,|\zeta|\sin(|\zeta|\,t) + \widehat{g}(\zeta)\cos(|\zeta|\,t)\right) \\
& \times\left(-\overline{\widehat{f}(\zeta)}\,|\zeta|\sin(|\zeta|\,t) + \overline{\widehat{g}(\zeta)}\cos(|\zeta|\,t)\right) \\
= \quad & |\zeta|^2\sin^2(|\zeta|\,t)\left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 + \cos^2(|\zeta|\,t)\,|\widehat{g}(\zeta)|^2 \\
& - |\zeta|\sin(|\zeta|\,t)\cos(|\zeta|\,t)\left[\widehat{f}(\zeta)\overline{\widehat{g}(\zeta)} + \overline{\widehat{f}(\zeta)}\widehat{g}(\zeta)\right].
\end{aligned}$$

En utilisant les identitiés trigonométriques $\sin 2x = 2\sin x \cos x$,

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

on a

$$\begin{aligned}
& |\zeta|^2 \left[\frac{1-\cos(2|\zeta|\, t)}{2}\right] \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 + \left[\frac{1+\cos(2|\zeta|\, t)}{2}\right] |\widehat{g}(\zeta)|^2 \\
& -\frac{1}{2}|\zeta| \sin(2|\zeta|\, t) \left[\widehat{f}(\zeta)\overline{\widehat{g}(\zeta)} + \overline{\widehat{f}(\zeta)}\widehat{g}(\zeta)\right] \\
= \ & \frac{1}{2}\left[|\zeta|^2 \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 + |\widehat{g}(\zeta)|^2\right] + I(t,\zeta)
\end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
I(t,\zeta) &= -\frac{1}{2}\left|\zeta\right|\sin(2\left|\zeta\right| t)\left[\widehat{f}(\zeta)\overline{\widehat{g}(\zeta)}+\overline{\widehat{f}(\zeta)}\widehat{g}(\zeta)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2}\cos\left(2\left|\zeta\right| t\right)\left[-\left|\zeta\right|^2\left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2+\left|\widehat{g}(\zeta)\right|^2\right] \\
&= \sin(2\left|\zeta\right| t)\, G_1(\zeta)+\cos\left(2\left|\zeta\right| t\right) G_2(\zeta).
\end{aligned}
$$

Sous l'hypothèse que $\nabla_x f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ on a G_1 et G_2 qui sont dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (comme produits de deux fonctions L^2)

Sous l'hypothèse que $\nabla_x f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ on a G_1 et G_2 qui sont dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (comme produits de deux fonctions L^2) et donc par le lemme de Riemann-Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sin(2\,|\zeta|\,t)\, G_1(\zeta)\, d\zeta + \int_{\mathbb{R}^N} \cos\left(2\,|\zeta|\,t\right)\, G_2(\zeta)\, d\zeta \to 0 \quad (t \to \pm\infty).$$

Sous l'hypothèse que $\nabla_x f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ on a G_1 et G_2 qui sont dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (comme produits de deux fonctions L^2) et donc par le lemme de Riemann-Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sin(2\,|\zeta|\,t)\, G_1(\zeta) d\zeta + \int_{\mathbb{R}^N} \cos(2\,|\zeta|\,t)\, G_2(\zeta) d\zeta \to 0 \quad (t \to \pm\infty).$$

Il s'ensuit que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u_t}(t,\zeta)|^2\, d\zeta \to \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\zeta|^2 \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta + \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{g}(\zeta)|^2\, d\zeta\right] \quad (t \to \pm\infty)$$

Sous l'hypothèse que $\nabla_x f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ on a G_1 et G_2 qui sont dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (comme produits de deux fonctions L^2) et donc par le lemme de Riemann-Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sin(2\,|\zeta|\,t)\,G_1(\zeta)d\zeta + \int_{\mathbb{R}^N} \cos\left(2\,|\zeta|\,t\right)\,G_2(\zeta)d\zeta \to 0 \quad (t \to \pm\infty).$$

Il s'ensuit que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\widehat{u_t}(t,\zeta)\right|^2 d\zeta \to \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\zeta|^2 \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta + \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{g}(\zeta)|^2\, d\zeta\right] \quad (t \to \pm\infty)$$

Donc l'energie cinétique $\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ tend vers la moitié de l'energie totale (*qui elle se conserve*) lorsque $t \to \pm\infty$ et donc, pareillement l'energie cinétique $\|\nabla_x u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ tend vers la moitié de l'energie totale lorsque $t \to \pm\infty$.

Sous l'hypothèse que $\nabla_x f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ on a G_1 et G_2 qui sont dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (comme produits de deux fonctions L^2) et donc par le lemme de Riemann-Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sin(2\,|\zeta|\,t)\,G_1(\zeta)d\zeta + \int_{\mathbb{R}^N} \cos\left(2\,|\zeta|\,t\right)\,G_2(\zeta)d\zeta \to 0 \quad (t \to \pm\infty).$$

Il s'ensuit que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{u_t}(t,\zeta)|^2\,d\zeta \to \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\zeta|^2 \left|\widehat{f}(\zeta)\right|^2 d\zeta + \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{g}(\zeta)|^2\,d\zeta\right] \quad (t \to \pm\infty)$$

Donc l'energie cinétique $\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ tend vers la moitié de l'energie totale (*qui elle se conserve*) lorsque $t \to \pm\infty$ et donc, pareillement l'energie cinétique $\|\nabla_x u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ tend vers la moitié de l'energie totale lorsque $t \to \pm\infty$. C'est le phénomène d'**équipartition de l'energie**.