Résumé des cours

-Lundi 18 Janvier

Étude de la mesure empirique : survol de près d'un siècle de recherches – *Davit Varron*

La mesure empirique est la somme normalisée des mesures de Dirac en chaque point d'un échantillon mutuellement indépendant. La compréhension la plus fine possible de cette mesure discrète aléatoire est au coeur de nombreux problèmes statistiques. En particulier ses divers comportements asymptotiques lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini, mais aussi ses propriétés stochastiques à taille d'échantillon fixée. Je présenterai les différentes avancées réalisées depuis le début de cette théorie dans les années 30.

Retour sur le théorème fondamental du calcul intégral – *Gilles Lancien*

Le théorème fondamental du calcul intégral assure que si une fonction f de [0,1] dans R est continue, alors la fonction F qui à x associe l'intégrale de f entre 0 et x est de classe C^1 sur [0,1] et que F'=f. Le but de cet exposé est d'étudier quelques généralisations de ce résultat essentiellement dues à Henri Lebesgue. Remarquons que la fonction F est bien définie dès que f est intégrable (au sens de Lebesgue). Nous verrons qu'alors F'=f presque partout. Ensuite nous prouverons qu'une fonction croissante est dérivable presque partout et de dérivée intégrable. On en déduit assez facilement qu'une fonction F lipschitzienne, ou même à variation bornée, est dérivable presque partout, de dérivée intégrable. Nous examinerons ensuite la question naturelle du lien entre la fonction F et l'intégrale de F' entre 0 et x. Finalement nous ferons une petite incursion en dimension infinie en expliquant que pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace de Banach X, la validité des théorèmes ci-dessus dépend de l'espace X.

Théorie des grandeurs, arithmétisation, théorie de la divisibilité – *Stefan Neuwirth*

Je montrerai dans une première partie comment les Grecs et les Arabes ont développé une théorie des grandeurs géométriques (longueur, aire, volume) qui a abouti à leur arithmétisation, c'est-à-dire à leur réduction aux nombres entiers. Dans une deuxième partie, je décrirai les deux approches concurrentes de Dedekind et de Kronecker pour l'extension d'une théorie de la divisibilité des nombres entiers aux nombres algébriques après Kummer et je développerai les options philosophiques de ces deux mathématiciens du 19e siècle.

-Mardi 19 Janvier

Le jeu de l'écrit – *Nabile Boussaïd*

Cette séance s'inscrit dans la préparation aux écrits de l'agrégation.

Autour du grand théorème de Baire – *Antonin Prochazka*

Tout le monde sait bien qu'une limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement une fonction continue. Or, le grand théorème de Baire (qui date de 1904) dit qu'elle ne peut pas être trop discontinue non plus. Soit M un espace métrique complet. Soit X un espace vectoriel normé et soit f une application de M dans X. Les assertions suivantes sont équivalentes:
(1) pour toute partie fermée non vide F de M, il existe x dans F tel que $f|_F$ est continue en x.
(2) f est la limite simple d'une suite d'applications continues.
Dans cet exposé, on verra la preuve de ce théorème. On apprendra aussi sur les nombres ordinaux et la récurrence transfinie dont on aura besoin pour l'implication (1) => (2).

Témoignage des doctorants – *Johann Cuenin, Aude Dalet et Colin Petitjean*

-Mercredi 20 Janvier

Sur les méthodes variationnelles en analyse non linéaire – *Louis Jeanjean*

Une méthode variationnelle permet de ramener la recherche d'une solution pour une équation aux dérivées partielles à la preuve qu'une fonction possède un point stationnaire. À travers le traitement de quelques exemples simples, nous présenterons le lien entre l'équation et la fonction, le type d'espace sur lequel la fonction est définie et quelles sont les étapes clefs pour prouver l'existence du point stationnaire. Autant que possible nous discuterons aussi des difficultés que l'on rencontre dans ce domaine, en particulier nous verrons que des problèmes liés à un manque de compacité surgissent rapidement.

Quelques thèmes d'analyse complexe – *Martin Meyer*

La théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe est historiquement à l'origine de nombreux développements mathématiques de ce dernier siècle. On reviendra dans ces deux séances sur quelques objets classiques de la théorie, en insistant sur leur "caractère visuel", géométrique et topologique. On donnera quelques indications sur leur genèse historique. Les fonctions sont définies sur des disques, des demi-plans, des bandes infinies, des secteurs angulaires, et l'on se penche sur le vertige de leurs points singuliers. Étudier une fonction holomorphe autour d'un point singulier essentiel est comme étudier une fonction entière "au voisinage de l'infini", et le plan "complété d'un point à l'infini" est un objet conceptuellement très riche. Plutôt que de se perdre dans les détails d'une démonstration particulière, on essayera de faire apparaître quelques liens profonds entre différents aspects de la théorie.

-Jeudi 22 Janvier

Polynômes à plusieurs variables – *Agnès David*

Une partie de cette présentation concernera les polynômes symétriques (définition, lien avec les racines et coefficients de polynômes, théorème de structure). Nous évoquerons aussi l'arithmétique générale des anneaux de polynômes à plusieurs variables (factorialité, noetheriannité) via des théorèmes de transfert. Enfin, nous aborderons les ensembles définis par l'annulation de polynômes, avec le Nullstellensatz et une ouverture vers la géométrie algébrique.

Rédaction d'un texte mathématique – *Alexandre Nou*

Le but de cette intervention est de formuler quelques mises en garde concernant la rédaction d'un texte mathématique (mémoire, copie de concours, etc.). Dans un premier temps, on analysera quelques exemples de "mauvaise rédaction" et l'on tentera d'en extraire quelques règles générales à suivre. Dans un second temps, on visionnera un exposé de Jean-Pierre Serre qui nous explique son point de vue sur le sujet.

Géométrie euclidienne en basse dimension – *Aurélien Galateau*

On donnera quelques compléments sur la structure des groupes orthogonaux en dimensions 2 et 3 (questions de simplicité, forme des sous-groupes finis) ; ceci permettra de mettre en évidence les groupes de transformations des polygones et des polyèdres réguliers.